

ΤΟΜΕΑΣ
ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝ. & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΚΑΛΜΑΝ
ΣΤΟΝ ΥΔΡΟΓΡΑΦΙΚΟ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΘΕΣΗΣ
ΜΕ ΤΟ GPS

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΓΙΑΝΝΙΟΥ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1992

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συνεχής ανάπτυξη των δορυφορικών συστημάτων έχει επηρεάσει πολύ έντονα την επιστήμη της Γεωδαισίας, ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια. Η ανάγκη διαρκούς ενημέρωσης του Αγρονόμου και Τοπογράφου Μηχανικού πάνω στις πρόσφατες εξελίξεις και στις νέες πρακτικές που αυτές συνεπάγονται αποτελεί μια παγκόσμια πραγματικότητα. Ο Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του ΑΠΘ παρακολουθεί με ενδιαφέρον την καθημερινά αναπτυσσόμενη θεωρία και πρακτική και σκοπεύει στην παραπέρα ανάπτυξη των σχετικών δραστηριοτήτων του. Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσεται και η παρούσα διπλωματική εργασία, που αποτελεί και την πρώτη προσπάθεια επεξεργασίας δεδομένων μετρήσεων του δορυφορικού συστήματος GPS στον Τομέα. Το GPS αποτελεί το πιο σύγχρονο και αξιόπιστο δορυφορικό σύστημα παγκόσμιου προσδιορισμού θέσης, που προβλέπεται ότι θα κυριαρχήσει στο προσεχές μέλλον.

Πιο συγκεκριμένα σκοπός της εργασίας είναι η σύνταξη δύο προγραμμάτων για ηλεκτρονικό υπολογιστή. Το πρώτο αφορά τον υπολογισμό των συντεταγμένων του δέκτη στο σύστημα WGS 84 από μετρήσεις ψευδοαποστάσεων με τον P- κώδικα του συστήματος. Το δεύτερο ασχολείται με την εφαρμογή του φίλτρου Kalman στο ναυτιλιακό εντοπισμό θέσης με το σύστημα GPS. Για την ορθότερη αντιμετώπιση του δεύτερου ζητήματος κρίθηκε σκόπιμη η σύνταξη και ενός τρίτου προγράμματος, το οποίο αναλύει τα δεδομένα των μετρήσεων και υπολογίζει συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης για τις συνιστώσες της ταχύτητας του πλοίου.

Στις σελίδες που ακολουθούν γίνεται η περιγραφή των αλγορίθμων που υλοποιούν τα παραπάνω προγράμματα και παρατίθεται επίσης το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο αυτοί στηρίζονται.

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 1992

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για τη διεκπεραίωση της εργασίας αυτής θα ήθελα να ευχαριστήσω κύρια τους δύο διδάσκοντες στο ΤΑΤΜ ΑΠΘ, τους αναπληρωτές καθηγητές κ. Κ. Κατσάμπαλο και κ. Η. Τζιαβό, οι οποίοι πρότειναν την παρούσα διπλωματική εργασία και την επέβλεπαν σε όλα τα στάδια της εξέλιξής της. Η συμβολή τους ήταν καθοριστική για την ορθή και κατά το δυνατό πληρέστερη αντιμετώπιση του αντικειμένου της εργασίας. Η συνεργασία μου μαζί τους ήταν ευχάριστη και ιδιαίτερα αποδοτική.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ. Δ. Ρωσσικόπουλο και τον καθηγητή κ. Δ. Αραμπέλο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους σε θέματα της αρμοδιότητάς τους. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον καθηγητή κ. Α. Δερμάνη για τις πολύτιμες συμβουλές του σε δύσκολα και λεπτά θεωρητικά ζητήματα σχετικά με το φίλτρο Kalman.

Καθοριστική για την ποιότητα της εργασίας αυτής ήταν η ευγενική παραχώρηση από τον διδάκτορα του ΤΑΤΜ ΕΜΠ κ. Χ. Λιαπάκη μιας σειράς δεδομένων μετρήσεων με ένα δέκτη ναυσιπλοΐας GPS. Πολύ σημαντικές επίσης ήταν οι συμβουλές του σε θέματα που αφορούσαν το σύνολο της εργασίας μου. Έντονα υποχρεωμένος νοιώθω απέναντι στον επίκουρο καθηγητή του ΕΜΠ κ. Δ. Παραδείση, ο οποίος με υποδειγματική προθυμία έλυσε τις πολλές μου απορίες σε θέματα GPS και επιπλέον μου παρείχε πολύτιμο βιβλιογραφικό υλικό.

Όλους τους παραπάνω τους ευχαριστώ για την καλή διάθεσή τους απέναντι μου και για τη συνεισφορά τους σε μία ολοκληρωμένη και αποδοτική για μένα διπλωματική εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	i
Ευχαριστίες	ii
Περιεχόμενα	iii
Περίληψη	iv
Summary	v
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΤΟ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΘΕΣΗΣ GPS	
2.1 Εισαγωγή	8
2.2 Κινηματικός προσδιορισμός στίγματος με μετρήσεις GPS	11
2.3 Αλγόριθμος προσδιορισμού διανύσματος θέσης	22
2.4 Παράδειγμα επεξεργασίας μετρήσεων	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΤΟ ΦΙΛΤΡΟ KALMAN	
3.1 Εισαγωγή	45
3.1.1 Παράδειγμα	47
3.2 Γενικά στοιχεία	51
3.3 Χρήση του φίλτρου Kalman στο GPS	60
3.4 Αλγόριθμος προσδιορισμού του διανύσματος κατάστασης	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ	
4.1 Δεδομένα	79
4.2 Περιγραφή προγράμματος	86
4.3 Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων	91
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	
5.1 Συμπεράσματα	103
5.2 Προτάσεις	108
Βιβλιογραφία	111

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ασχολείται με τη μελέτη του προσδιορισμού θέσης με το σύστημα GPS (Global Positioning System) με μετρήσεις ψευδοαποστάσεων και με την εφαρμογή του φίλτρου Kalman στον υδρογραφικό εντοπισμό θέσης με τη βοήθεια του GPS. Αρχίζει με μια παρουσίαση του συστήματος, στην οποία περιλαμβάνονται μια σύντομη αναφορά στις κινηματικές εφαρμογές του GPS και μια αναλυτική περιγραφή (με τη μορφή παραδείγματος) του αλγόριθμου προσδιορισμού θέσης από παρατηρήσεις ψευδοαποστάσεων. Στη συνέχεια ακολουθεί η εκτενής θεωρητική παρουσίαση του φίλτρου Kalman. Τέλος περιγράφεται η δομή του προγράμματος σε ΗΥ, που υλοποιεί το μοντέλο σταθερής ταχύτητας του φίλτρου και δίνονται τα αποτελέσματα και τα αντίστοιχα σχόλια. Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί πραγματικά δεδομένα μετρήσεων από ένα δέκτη ναυσιπλοΐας GPS.

Η εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο περιλαμβάνει την εισαγωγή.

Το δεύτερο απαρτίζεται από τέσσερα υποκεφάλαια. Σε αυτά δίνονται κάποια γενικά στοιχεία για το GPS και τον κινηματικό προσδιορισμό στίγματος με αυτό. Επίσης δίνονται οι εξισώσεις προσδιορισμού θέσης υπό μορφή αλγόριθμου και τέλος ένα αριθμητικό παράδειγμα υλοποίησης του αλγόριθμου.

Το τρίτο κεφάλαιο συνίσταται από τέσσερα υποκεφάλαια. Πρώτο είναι η εισαγωγή και ακολουθεί ένα θεωρητικό παράδειγμα που εισάγει τον αναγνώστη πιο ομαλά στο επόμενο, όπου γίνεται η αυστηρή θεωρητική περιγραφή του φίλτρου Kalman. Το τρίτο υποκεφάλαιο περιγράφει την εφαρμογή του φίλτρου σε παρατηρήσεις από GPS και στο τέταρτο δίνεται μία περίληψη των παραπάνω υπό μορφή αλγόριθμου για το μοντέλο σταθερής ταχύτητας.

Στο τέταρτο περιέχονται τρία υποκεφάλαια. Στο πρώτο γίνεται η περιγραφή και μια αξιολόγηση των δεδομένων του δέκτη. Στο δεύτερο περιγράφεται η δομή του προγράμματος και αιτιολογούνται οι τιμές των παραμέτρων του. Στο τελευταίο γίνεται η παρουσίαση και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Σ' αυτό γίνονται επίσης και οι σχετικές προτάσεις.

THE USE OF KALMAN FILTERING IN THE HYDROGRAPHIC POSITIONING USING GPS.

By Michalis Gianniou

Diploma thesis submitted for the degree "Diploma of Rural and Surveying Engineering"

Department of Geodesy and Surveying, School of Rural and Surveying Engineering, University of Thessaloniki - Faculty of Engineering.

SUMMARY

This diploma thesis deals with the study of positioning at sea using the satellite-based radio navigation system NAVSTAR/GPS. It refers to the hydrographic and navigation applications of it implementing the Kalman filtering technique for precise positioning of a moving vessel taking into account its dynamics and the corresponding error sources.

Pseudorange GPS measurements collected at sea are used for the design and development of various Kalman filtering models for GPS. These models are developed according to the speed and acceleration of the vessel and introducing into the computation the geometry of satellites as an additional information.

The thesis is divided in four main parts: The first part is an introductory chapter concerning hydrography and its marine applications related to geodesy and other geosciences.

The second part contains four chapters. In the first two chapters the necessary background and basic principles concerning GPS are presented as well as its kinematic applications to navigation problems. The last two chapters describe the algorithm employed for precise positioning at sea using GPS pseudoranges and include a detailed description of the corresponding equations. Finally, a numerical example is given in order to make clear the structure of the computer programs designed.

The third part consists also from four chapters. The first of them is an introduction concerning the fundamental Kalman filtering theory and its applications to navigation. In the second chapter a theoretical example of the use of Kalman filtering is presented in order to demonstrate its application to navigation and generally to marine integrated navigation systems. The objective of the third chapter is the presentation of the use of Kalman filtering in GPS measurements and the last one regards the identification of the interactions of the system and the filter in order to meet the specified requirements in accuracy and reliability.

The fourth part contains three chapters. In the first chapter a discussion is given regarding the equality and reliability of the measurements selected at sea and several conclusions and proposals are drawn. In the second chapter the structure of the computer program using the Kalman filtering technique is presented and in the last chapter the results from the evaluation of a numerical experiment are carried out.

In the fifth part the main conclusions are drawn according to the performed analysis and the obtained results and some recommendations and suggestions are proposed for further investigation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θάλασσα προσέλκυε από τα αρχαία χρόνια το έντονο ενδιαφέρον του ανθρώπου. Αρχικά αποτελούσε κάτι άγνωστο και προκαλούσε το φόβο αλλά και την περιέργεια. Πολύ νωρίς όμως έγιναν αντιληπτά τα οφέλη και οι δυνατότητες που προσφέρει. Έτσι από την εποχή που αποτελούσε καθαρά θεοποιημένο στοιχείο, περνάμε σε μία άλλη, όπου γίνονται οι πρώτες προσπάθειες εξοικείωσης του ανθρώπου μαζί της. Η αλιεία είναι πια πραγματικότητα και τα σκάφη που κατασκευάζονται επιτρέπουν ολοένα και μεγαλύτερα ταξίδια. Οι πρόοδοι που επιτυγχάνονται στον τομέα της εκμετάλλευσης και της εξερεύνησης της θάλασσας έχουν επιταχυνόμενους ρυθμούς. Μια ριζική αλλαγή συμβαίνει όταν τα ατμόπλοια αντικαθιστούνται από πετρελαιοκίνητα πλοία. Αυτό σηματοδοτεί μία νέα εποχή στις σχέσεις του ανθρώπου με τη θάλασσα. Όλες οι δραστηριότητες που σχετίζονται με αυτή αυξάνονται ραγδαία.

Αυτή η αυξητική τάση υπάρχει και σήμερα, όπου η σημασία της θάλασσας είναι μεγαλύτερη από ποτέ. Αποτελεί μία τεράστια πηγή πλούτου, έχει πολύπλευρο επιστημονικό ενδιαφέρον, εξυπηρετεί τις συγκοινωνίες, έχει μεγάλη στρατηγική σημασία, απασχολεί επαγγελματικά μεγάλο αριθμό ανθρώπων και τέλος είναι ένας πολύ ευαίσθητος και σημαντικός παράγοντας για την οικολογική ισορροπία του πλανήτη μας.

Τη μεγαλύτερη εκμετάλλευση της θάλασσας αποτελεί η αλιεία. Εκτός όμως από αυτή σημαντικές προσπάθειες γίνονται για την μεγαλύτερη ανάπτυξη μεθόδων αξιοποίησης και άλλων θαλάσσιων φυσικών πόρων. Οι κυριότεροι από αυτούς είναι οι υδρογονάνθρακες (πετρέλαιο, φυσικό αέριο κ.α.) και τα μεταλλευτικά κοιτάσματα. Από όσο είναι σήμερα γνωστό, κάτω από τους ωκεάνιους πυθμένες υπάρχουν μεγαλύτερες ποσότητες μαγκανίου, χαλκού, νικέλιου και κοβάλτιου από ότι σε όλα τα κοιτάσματα των ηπειρωτικών εκτάσεων (Seeber, 1975).

Οι επιστήμες που σχετίζονται έμμεσα ή άμεσα με τη θάλασσα είναι πάρα πολλές. Κατ' εξοχή σχετικές είναι οι γεωεπιστήμες, όπως γεωδαισία, υδρογραφία, ωκεανογραφία, γεωφυσική, γεωλογία, γεωδυναμική, σεισμολογία κ. α.. Προχωρώντας παραπέρα, άλλες επιστήμες με παρόμοιο ενδιαφέρον εκτείνονται από την περιβαλλοντολογία, τη θαλάσσια βιολογία μέχρι τη νομική (ναυτικό δίκαιο, νομικό καθεστώς παράκτιων περιοχών) και την ιστορία και αρχαιολογία (εξερεύνηση ναυαγίων).

Η ναυτιλία είναι σήμερα εξαιρετικά αναπτυγμένη και εξυπηρετεί τόσο τη διακίνηση εμπορευμάτων όσο και ανθρώπων. Προσφέρει ένα ασφαλή, μαζικό και οικονομικό τρόπο μεταφοράς με ελάχιστη περιβαλλοντική επιβάρυνση. Σημαντική είναι και η στρατηγική σημασία της θάλασσας. Είναι κάτι που επηρεάζει έντονα τη ζωή και τις διεθνείς σχέσεις μιας χώρας. Η Ελλάδα λόγω της θέσης της και της νησιωτικής της διαμόρφωσης έχει μία εξέχουσα στρατηγική σημασία για την περιοχή της Μεσογείου.

Όλες οι παραπάνω δραστηριότητες συνεπάγονται και το αντίστοιχο ανθρώπινο δυναμικό, το οποίο ασχολείται επαγγελματικά με αυτές. Δεν είναι ανάγκη να διαθέτει κανείς στατιστικά στοιχεία για να αντιληφθεί το πόσο μεγάλο είναι αυτό και ποιες είναι οι οικονομικοκοινωνικές ωφέλειες της υφιστάμενης κατάστασης.

Τέλος ένα θέμα που έχει ιδιαίτερη σημασία στις μέρες μας, ενώ πριν λίγες δεκαετίες ήταν κάτι ουσιαστικά ανύπαρκτο, είναι η σημασία του θαλάσσιου περιβάλλοντος στη διατήρηση της οικολογικής ισορροπίας της Γης. Η αλόγιστη εκμετάλλευση της θάλασσας, η συνεχιζόμενη διοχέτευση αποβλήτων σ' αυτή, τα συχνά ατυχήματα των πετρελαιοφόρων πλοίων, καθώς και άλλοι παράγοντες που την επηρεάζουν εγκυμονούν τεράστιους κινδύνους όχι μόνο για την ισορροπία της ίδιας αλλά και γι' αυτή ολόκληρου του πλανήτη μας. Η ανάγκη λοιπόν για μία συστηματική και επιστημονική αντιμετώπιση των σχετικών προβλημάτων είναι επιτακτική.

Η με επιταχυνόμενο ρυθμό αξιοποίηση και έρευνα της θάλασσας εμπλέκεται με την επιστημονική γνώση και την τεχνολογική υποδομή καθώς εξαρτάται άμεσα από αυτές, αλλά αποτελεί ταυτόχρονα και αιτία ανάπτυξής τους. Το σύνολο των παραπάνω δραστηριοτήτων στηρίζεται στη βοήθεια της υδρογραφίας και της θαλάσσιας γεωδαισίας οι οποίες παρέχουν λύση στο πρόβλημα του προσδιορισμού θέσης και βάθους στη θάλασσα και κατασκευάζουν ναυτικούς χάρτες. Τα δύο αυτά λοιπόν γνωστικά αντικείμενα είναι απαραίτητα καθώς οποιοδήποτε πλοίο πρέπει να μπορεί να προσδιορίζει με ακρίβεια τη θέση του πάνω σε κάποιο αξιόπιστο χάρτη. Επιπλέον, η περίπλοκη ισχύουσα νομοθεσία σχετικά με θέματα ιδιοκτησίας και εκμετάλλευσης των παράκτιων περιοχών επιβάλλει για λόγους εθνικούς την πολύ καλή αποτύπωση και τον έλεγχο αυτών των περιοχών. Η συμβολή του Αγρονόμου και Τοπογράφου

Μηχανικού στο θαλάσσιο εντοπισμό θέσης και στην παραγωγή υδρογραφικών χαρτών είναι μεγάλη.

Μερικές απο τις εργασίες στις οποίες είναι απαραίτητη η ακριβής εύρεση στίγματος είναι (Τζιαβός, 1988): απεικόνιση της τοπογραφίας του θαλάσσιου πυθμένα, απεικόνιση γεωλογικών και γεωφυσικών πληροφοριών, θαλάσσια βαρυτημετρία, τοποθέτηση οργάνων για την ανεύρεση φυσικών πηγών ενέργειας, λιμενικά έργα, προγράμματα περιβαλλοντολογικής προστασίας, καθορισμός χωρικών και διεθνών υδάτων.

Είναι γνωστό πως ο καθορισμός της θέσης ενός σημείου στη θάλασσα είναι από τη φύση του πολύ διαφορετικός από τον αντίστοιχο στην ξηρά. Η βασική τους διαφορά είναι ότι ο θαλάσσιος εντοπισμός είναι δυναμικός, με άλλα λόγια η θέση ενός πλοίου είναι διαφορετική για κάθε χρονική στιγμή. Αυτό συμβαίνει και για την περίπτωση αγκυροβολημένου πλοίου που εκτελεί εργασίες, εξαιτίας της συνεχούς κίνησης της επιφάνειας της θάλασσας αλλά και των βαθύτερων στρωμάτων της. Η σημασία του γεγονότος αυτού είναι μεγάλη, γιατί μας στερεί τη δυνατότητα να επαναλάβουμε τις παρατηρήσεις για προσδιορισμό θέσης σε κάποια άλλη χρονική στιγμή, όπως γίνεται στη γεωδαισία και την τοπογραφία και να αυξήσουμε έτσι την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Εκτός από αυτό όμως, στη θάλασσα δεν υπάρχουν κατά κανόνα φυσικά εδαφικά ανυψώματα με τη βοήθεια των οποίων θα μπορούσαν να περιοριστούν τα προβλήματα που εισάγει η γήινη καμπυλότητα. Έτσι τα συστήματα θαλάσσιου εντοπισμού σχεδιάζονται αρκετά διαφορετικά από τα επίγεια συστήματα μετρήσεων, έχοντας ως ένα από τους στόχους τους, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που χρησιμοποιούν να μπορούν κατά τη διάδοσή τους να ακολουθούν την καμπύλη θαλάσσια επιφάνεια. Με τον τρόπο αυτό αυξάνεται η εμβέλειά τους. Όμως τα κύματα που έχουν τέτοιες ιδιότητες είναι αυτά των μεσαίων και χαμηλών συχνοτήτων και η ακρίβεια των μετρήσεων με αυτά είναι μικρότερη από την αντίστοιχη των κυμάτων υψηλών συχνοτήτων. Το συμπέρασμα δηλαδή είναι ότι εμβέλεια και η ακρίβεια των συστημάτων εντοπισμού στη θάλασσα είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα. Στον προσδιορισμό θέσης με τη βοήθεια κυμάτων πρέπει να είναι γνωστές οι ιδιότητες της μετάδοσης του σήματος, γιατί η θαλάσσια επιφάνεια τις επηρεάζει σημαντικά. Τέλος η κίνηση του πλοίου πάνω σε μία συγκεκριμένη πορεία περιλαμβάνει ανεπιθύμητες παραμέτρους όπως είναι οι τρεις γωνίες στροφής γύρω από τους άξονες ενός τρισσορθογώνιου συστήματος αναφοράς συνδεδεμένου με το πλοίο και οι αντίστοιχες ανεπιθύμητες ταχύτητες ή επιταχύνσεις σε αυτές τις διευθύνσεις.

Γενικά ο θαλάσσιος καθορισμός στίγματος επιτυγχάνεται με δύο ειδών συστήματα: τα επίγεια και τα δορυφορικά. Τα πρώτα περιλαμβάνουν τις εξής κατηγορίες (Τζιαβός, 1988): τα οπτικά, τα ηλεκτρομαγνητικά (EDM), τα ραδιοσυστήματα, τα ακουστικά και τα αδρανειακά συστήματα.

Τα οπτικά συστήματα σπάνια χρησιμοποιούνται σήμερα, καθώς τα ηλεκτρονικά όργανα τα έχουν ολοκληρωτικά σχεδόν αντικαταστήσει. Τα κυριότερα οπτικά όργανα είναι το θεοδόλιχο και ο εξάντας. Το πρώτο ως γνωστό μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για σκόπευση του πλοίου από την ξηρά. Αντίθετα ο εξάντας έχει κατασκευαστεί για χρήση πάνω στο σκάφος. Είναι ένα πολύ παλιό όργανο αλλά υπάρχουν και εξε-

λιγμένες ψηφιακές μορφές του. Γενικά τα οπτικά όργανα έχουν πολλούς περιορισμούς στη λειτουργία τους, όπως για παράδειγμα ο απαραίτητος φωτισμός των στόχων, η μικρή απόσταση λειτουργίας από τις ακτές και η αναγκαιότητα της ύπαρξης στόχων γνωστών συντεταγμένων. Εκτός αυτού όμως η ακρίβεια που επιτυγχάνεται δεν είναι μεγάλη.

Τα ηλεκτρικά-ηλεκτρομαγνητικά συστήματα χρησιμοποιούν συχνότητες στην περιοχή των μικροκυμάτων αλλά και σε μικρότερες (μέσης συχνότητας MF, χαμηλής συχνότητας LF και πολύ χαμηλής συχνότητας VLF). Τα ραδιοσυστήματα μπορούν να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα κυκλικά και τα υπερβολικά. Τα πρώτα προσδιορίζουν τη θέση ενός δέκτη ως τομή δύο γεωμετρικών τόπων που είναι κύκλοι. Στα υπερβολικά αντί για κύκλους έχουμε υπερβολές. Υπάρχουν και κάποια άλλα συστήματα, όπου οι δύο γεωμετρικοί τόποι είναι μία ευθεία και ένας κύκλος, αλλά δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα. Συνήθως η λειτουργία των ραδιοσυστημάτων στηρίζεται στην ύπαρξη σταθμών εκπομπής στην ξηρά και ενός δέκτη στο πλοίο. Υπάρχουν όμως και ορισμένες κατηγορίες συστημάτων (Rho-Rho) στα οποία ο πομπός βρίσκεται πάνω στο πλοίο. Τα ραδιοσυστήματα είναι σήμερα ο πιο συνηθισμένος τρόπος πλοήγησης. Τα γνωστότερα από αυτά είναι τα Omega, Loran-C, Decca και Syledis.

Η χρήση ακουστικών παλμικών κυμάτων είναι ο ευρύτερα χρησιμοποιούμενος τρόπος για τον προσδιορισμό του βάθους. Έχουν αναπτυχθεί όμως και ακουστικά συστήματα για τον οριζόντιο θαλάσσιο εντοπισμό. Λειτουργούν με τη βοήθεια ειδικών συσκευών που τοποθετούνται στον πυθμένα της θάλασσας (ανταποκριτές), οι οποίες λαμβάνουν και εκπέμπουν ακουστικά κύματα. Διακρίνονται σε συστήματα μικρής και μεγάλης βάσης.

Τα αδρανειακά συστήματα προϋποθέτουν για τη λειτουργία τους την ύπαρξη κίνησης. Στηρίζονται στο θεμελιώδη νόμο της μηχανικής και πραγματοποιούν διπλή ολοκλήρωση της επιτάχυνσης ως προς το χρόνο για να προσδιορίσουν την απόσταση. Οι επιταχύνσεις μετριοούνται από επιταχυνσιόμετρα, ενώ ο προσανατολισμός τους ελέγχεται με τη βοήθεια γυροσκοπίων. Παρέχουν εξαιρετικές ακρίβειες αλλά για μικρό χρονικό διάστημα, γι' αυτό χρησιμοποιούνται συνήθως μαζί με κάποιο άλλο σύστημα εντοπισμού. Ο πιο γνωστός τέτοιος συνδυασμός είναι αυτός με το δορυφορικό σύστημα GPS.

Τα δορυφορικά συστήματα προσδιορισμού θέσης άρχισαν να αναπτύσσονται τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες. Βασίζονται στην εκπομπή σημάτων από δορυφόρους τοποθετημένους σε γνωστές τροχιές και στη λήψη αυτών των σημάτων από δέκτες στην ξηρά, στη θάλασσα ή στον αέρα. Τα γνωστότερα από αυτά είναι το TRANSIT και το GPS. Το TRANSIT είναι το πρώτο δορυφορικό σύστημα εντοπισμού θέσης, άρχισε να λειτουργεί στα μέσα της δεκαετίας του 1960 και βασίζεται στο φαινόμενο Doppler. Η κάλυψη που παρέχει δεν είναι ικανοποιητική και επιπλέον η ακρίβειά του έχει ξεπεραστεί κατά πολύ από το GPS. Το GPS έχει αποσπάσει και σχεδόν μονοπωλεί το παγκόσμιο ενδιαφέρον. Τα πλεονεκτήματά του είναι ασύγκριτα σε σχέση με το TRANSIT, αλλά και με τα επίγεια συστήματα εντοπισμού. Σε πλήρη ανάπτυξη θα παρέχει εικοσιτετράωρη κάλυψη σε οποιοδήποτε σημείο της Γης ημέρα και νύχτα

ανεξάρτητα μετεωρολογικών συνθηκών και με πολύ υψηλή ακρίβεια. Έχει χρησιμοποιηθεί ήδη με ενθαρρυντικά αποτελέσματα στη ναυσιπλοΐα και θα αποτελέσει μία πραγματική επανάσταση στον τομέα της γεωδαισίας και της τοπογραφίας. Τέλος, άλλα υπάρχοντα δορυφορικά συστήματα προσδιορισμού θέσης είναι το ρωσικό GLONASS και το γαλλικό DORIS.

Όλα τα συστήματα θαλάσσιου εντοπισμού έχουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Τα βασικά κριτήρια αξιολόγησής τους είναι η ακρίβεια, η εμβέλεια και η αυτονομία τους.

Η ακρίβεια είναι από τους σημαντικότερους παράγοντες σε ένα σύστημα εντοπισμού. Τρία σημεία έχουν ενδιαφέρον εδώ: Κατά πόσο αυτή εξαρτάται από την απόσταση του πλοίου από τα σημεία εκπομπής, ποια είναι η πραγματική εξωτερική ακρίβεια των αποτελεσμάτων και ποια η εσωτερική, δηλαδή ο θόρυβος των παρατηρήσεων. Όπως είδαμε πριν, στα επίγεια ραδιοσυστήματα η ακρίβεια μειώνεται όσο μεγαλώνει η απόσταση του δέκτη από τους σταθμούς εκπομπής. Αντίθετα στα δορυφορικά συστήματα η ακρίβεια εξαρτάται βασικά από τη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων. Το GPS θα παρέχει σε πλήρη ανάπτυξη τέτοια κάλυψη, ώστε η ακρίβεια στο θαλάσσιο εντοπισμό (προσδιορισμός μόνο οριζοντίων συντεταγμένων) να μεταβάλλεται μέσα σε μικρά όρια. Η εξωτερική ακρίβεια των συντεταγμένων του GPS είναι αρκετά υψηλότερη από αυτή των καλύτερων επίγειων ραδιοσυστημάτων. Αυτή η διαφορά είναι πολύ έντονη στον απόλυτο προσδιορισμό, αλλά και στο σχετικό είναι σημαντική. Η ίδια υπεροχή του GPS παρατηρείται και αναφορικά με το θόρυβο των μετρήσεων. Ανάλογα μάλιστα με την κατηγορία του δέκτη, τα ποσοστά θορύβου των οριζόντιων συντεταγμένων μπορεί να είναι πραγματικά ελάχιστα.

Όσον αφορά την εμβέλεια των συστημάτων, εδώ η υπεροχή του GPS είναι απόλυτη. Είναι ένα σύστημα που καλύπτει πλήρως τη Γη, ενώ τα επίγεια συστήματα έχουν περιορισμούς στην ακτίνα λειτουργίας τους. Εκτός αυτού τα δεύτερα προϋποθέτουν την ύπαρξη και τη λειτουργία των αντίστοιχων σταθμών εκπομπής. Αυτό είναι ένα μειονέκτημα, γιατί αν και στις περιοχές που υπάρχει συχνή διέλευση πλοίων υπάρχει κατάλληλο δίκτυο σταθμών, σε απομακρυσμένες περιοχές η κάλυψη δεν επαρκεί. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι πολιτικές περιοχές οι οποίες παρουσιάζουν επιστημονικό ενδιαφέρον.

Τέλος η αυτονομία είναι ένας παράγοντας που μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στη χρήση ενός συστήματος. Είναι ευνόητο ότι ένα σύστημα είναι ουσιαστικά άχρηστο αν δε μπορεί να παρέχει συνεχή κάλυψη, έστω και αν όταν παρέχει στίγμα χαρακτηρίζεται από υψηλή ακρίβεια. Στο σημείο αυτό, με τις σημερινές συνθήκες τα επίγεια συστήματα υπερέχουν, αφού δεν έχουν ακόμα τεθεί σε τροχιά όλοι οι δορυφόροι του GPS και γι' αυτό υπάρχουν διαστήματα κατά τα οποία δεν παρέχεται στίγμα. Όταν όμως το GPS θα είναι επιχειρησιακά έτοιμο (προβλέπεται μέσα στο 1993), θα ανταποκρίνεται πλήρως σε αυτή την απαίτηση. Ακόμα και για τις περιπτώσεις δυσλειτουργίας κάποιων δορυφόρων, έχει προβλεφθεί η τοποθέτηση σε τροχιά και επεδροικών δορυφόρων.

Το γενικό συμπέρασμα από την παραπάνω σύγκριση είναι ότι τα δορυφορικά συστήματα ανταποκρίνονται πληρέστερα στις απαιτήσεις της σύγχρονης ναυσιπλοΐας,

σε σχέση με τα επίγεια ραδιοσυστήματα. Αυτό αποτελεί διεθνή παραδοχή και προβλέπεται ότι μετά την ολοκλήρωση του GPS τα τελευταία θα σταματήσουν σταδιακά να λειτουργούν.

Πάντως όσο και αν έχουν βελτιωθεί τα συστήματα εντοπισμού, δεν είναι ούτε σήμερα τέλεια. Έχουν βέβαια τη δυνατότητα να παρέχουν για απλές εφαρμογές ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά σε πιο εξειδικευμένες εργασίες, όπως είναι οι επιστημονικές έρευνες, παρουσιάζουν κάποιες αδυναμίες. Ένας τρόπος συνολικής αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η ανάπτυξη Ολοκληρωμένων Συστημάτων Πλοήγησης (Λιαπάκης 1991). Πρόκειται για συνδυασμένη χρήση πολλών συστημάτων με ταυτόχρονη βελτιστοποίηση δεδομένων.

Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι για μεμονωμένη αντιμετώπιση κάποιας αδυναμίας είναι οι εξής: Για το πρόβλημα της αυτονομίας η χρήση περισσοτέρων του ενός αλληλοκαλυπτόμενων συστημάτων. Στην περίπτωση που η εξωτερική ακρίβεια δεν επαρκεί, εφαρμόζεται η μέθοδος της ταυτόχρονης χρήσης ενός δεύτερου δέκτη που βρίσκεται σε σημείο γνωστών συντεταγμένων στην ξηρά (σχετικός προσδιορισμός).

Το πρόβλημα του θορύβου των παρατηρήσεων στον κινηματικό προσδιορισμό απαιτεί ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης που δε σχετίζεται, όπως οι προηγούμενοι, με την τεχνική των μετρήσεων. Η απομάκρυνση της επίδρασης του θορύβου γίνεται με τεχνικές που είναι γνωστές ως φιλτράρισμα και ομαλοποίηση. Πρόκειται για αλγόριθμους που εφαρμόζονται είτε στα παρατηρούμενα μεγέθη είτε στα αποτελέσματα των μετρήσεων. Η ομαλοποίηση δεν παρέχει αποτελέσματα ταυτόχρονα με το σύστημα εντοπισμού, αλλά μόνο για προηγούμενες χρονικές στιγμές. Είναι ακατάλληλη για την περίπτωση ενός κινητού που θέλει να γνωρίζει τη θέση του χωρίς την επίδραση του θορύβου σε κάθε στιγμή. Αυτή την ανάγκη μπορούν να την αντιμετωπίσουν οι τεχνικές φιλτραρίσματος.

Η πιο συνηθισμένη και αποδοτική τεχνική είναι αυτή του φίλτρου Kalman. Πρόκειται για μία μέθοδο που παρέχει αποτελέσματα αμέσως μετά από τις μετρήσεις. Το προσόν της είναι ότι εκτός από κάποια στοιχεία που χρησιμοποιεί για το μέγεθος του θορύβου, λαμβάνει ταυτόχρονα υπόψη (με τη μορφή κάποιων παραμέτρων) και τη δυναμική του συγκεκριμένου κινητού. Η εφαρμογή της απαιτεί κάποια προσοχή στον καθορισμό των παραπάνω παραμέτρων, αλλά με την προϋπόθεση ότι αυτές είναι σωστές τα παρεχόμενα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά σε σχέση με άλλες τεχνικές φιλτραρίσματος.

Η εισαγωγή αυτών των παραμέτρων αποτελεί μέρος της μοντελοποίησης της κίνησης, κάτι που είναι πολύ δυσκολότερο από την ανάλυση της συμπεριφοράς του θορύβου των μετρήσεων. Αυτό είναι ευνόητο για την περίπτωση ενός πλοίου, αφού στη θάλασσα οι αστάθμητοι παράγοντες που επηρεάζουν την κίνηση είναι πάρα πολλοί. Ένα πλοίο που εκτελεί απότομους ελιγμούς, όπως συμβαίνει συχνά στις επιστημονικές εργασίες, παρουσιάζει μία πολύ ετερογενή κινηματική συμπεριφορά, η οποία δυσκολεύει ιδιαίτερα τη μοντελοποίηση. Εξαιτίας λοιπόν των απρόβλεπτων ελιγμών η μοντελοποίηση δε μπορεί να είναι βέλτιστη (Huer, 1986). Επιπλέον οι μετρήσεις επηρεάζονται από την επίδραση των κυμάτων, αλλά γι' αυτό υπάρχουν κατάλληλοι αλγόριθμοι που περιορίζουν το πρόβλημα.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι το σύστημα εντοπισμού που προβλέπεται να κυριαρχήσει στη ναυσιπλοΐα -και όχι μόνο- στο προσεχές μέλλον είναι το GPS. Επίσης ένας δοκιμασμένος και αποτελεσματικός τρόπος αντιμετώπισης του θορύβου των μετρήσεων είναι η τεχνική του φίλτρου Kalman. Η εργασία αυτή ασχολείται με τα δύο παραπάνω αντικείμενα. Αρχικά γίνεται μία παρουσίαση του κινηματικού εντοπισμού με το GPS και μία αναλυτική μελέτη της μεθόδου προσδιορισμού θέσης με αυτό το σύστημα με μέτρηση ψευδοαποστάσεων, χρησιμοποιώντας δεδομένα μετρήσεων. Στη συνέχεια εξετάζεται ο τρόπος εφαρμογής του φίλτρου Kalman σε μετρήσεις GPS, γίνεται μία εφαρμογή του κατάλληλου αλγορίθμου σε πραγματικά δεδομένα μετρήσεων και μία ανάλυση των αποτελεσμάτων, ώστε να προκύψουν στο τέλος αντίστοιχα συμπεράσματα και προτάσεις.

Το όλο αντικείμενο της εργασίας έχει εκτός από το θεωρητικό του ενδιαφέρον και ανάλογο πρακτικό. Ασχολείται με προβλήματα που αντιμετωπίζονται συχνά στις θαλάσσιες εργασίες και παρέχει χρήσιμα συμπεράσματα. Εξάλλου πρέπει να γίνει αντιληπτή σε όλη της την έκταση η μεγάλη σημασία της θάλασσας στη σημερινή ζωή. Η έρευνα λοιπόν σε σχετικά θέματα αποτελεί εκτός από σύγχρονη αναγκαιότητα και μία σημαντική επένδυση, ιδιαίτερα για μία χώρα σαν την Ελλάδα. Τέλος δεν πρέπει να παραβλέπουμε το γεγονός ότι αν και οι γνώσεις που έχουμε για τη θάλασσα είναι τεράστιες σε σχέση με μερικές δεκαετίες πριν, ακόμα εξακολουθούμε να γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα γι' αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΘΕΣΗΣ GPS

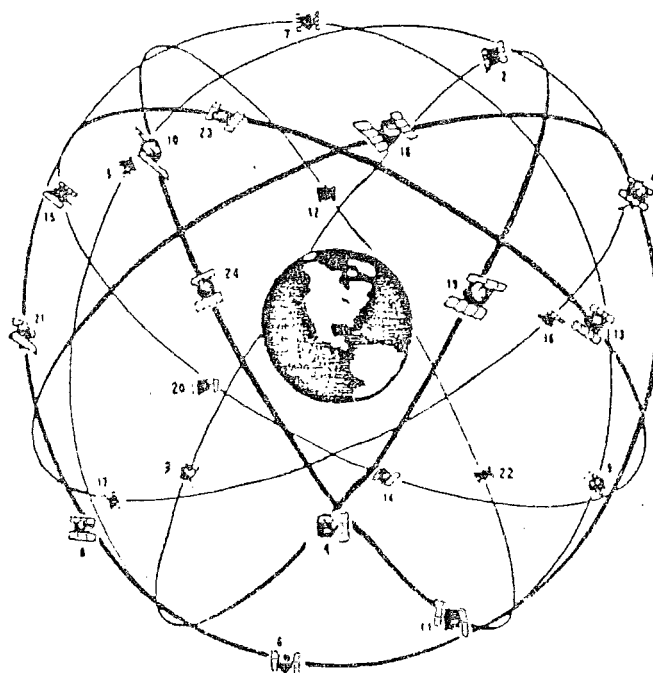
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σύστημα NAVSTAR GPS (NAVigation System with Time and Ranging, Global Positioning System) είναι ένα δορυφορικό ραδιοσύστημα, με τη βοήθεια του οποίου επιτυγχάνεται ακριβής τρισδιάστατος προσδιορισμός θέσης, προσδιορισμός στίγματος στην πλοήγηση και παρέχονται πληροφορίες σχετικές με τον ακριβή χρόνο.

Σχεδιάστηκε το 1973 για να εξυπηρετήσει στρατιωτικές ανάγκες πλοήγησης και προσδιορισμού του χρόνου από το Υπουργείο Εθνικής Άμυνας των ΗΠΑ, σε συνεργασία με άλλους φορείς. Από το 1983 άρχισε να χρησιμοποιείται και για γεωδαιτικές εργασίες. Σήμερα οι μη στρατιωτικές του εφαρμογές είναι πολλές. Ενδεικτικά μερικές από αυτές είναι η πλοήγηση σε ξηρά, θάλασσα, αέρα, διάστημα, σε λιμάνια και ποτάμια, κτηματογραφικές χαρτογραφήσεις, μέτρηση τοπογραφικών δικτύων, γεωφυσική μελέτη, υδρογραφικές εργασίες και φωτογραμμετρία χωρίς επίγειο έλεγχο. Σε πλήρη ανάπτυξη, το GPS θα είναι διαθέσιμο στους χρήστες του σε παγκόσμια κλίμακα, σε 24-ωρη βάση και ανεξάρτητα από μετεωρολογικές συνθήκες.

Όταν το σύστημα ολοκληρωθεί, (κάτι που καθυστέρησε εξαιτίας του ατυχήματος του διαστημικού λεωφορείου Challenger, μέσω του οποίου θα τοποθετούνταν σε τροχιά δορυφόροι του συστήματος GPS) θα αποτελείται από 24 δορυφόρους.

Αρχικά υπήρχε η προοπτική να τεθούν σε τροχιά 18 δορυφόροι και τρεις εφεδρικοί. Το 1988 υπογράφηκε όμως νέα συμφωνία για ένα σύνολο 24 δορυφόρων, δηλαδή 21 και 3 εφεδρικοί. Η διάταξή τους σχεδιάστηκε έτσι, ώστε σε κάθε τόπο της επιφάνειας της Γης να βρίσκονται ανά πάσα στιγμή το λιγότερο 4 δορυφόροι πάνω από τον ορίζοντα του. Οι δορυφόροι κινούνται επάνω σε έξι τροχιακά επίπεδα με κλίση 55° ως προς το επίπεδο του ισημερινού, σε περίπου κυκλικές τροχιές και σε ύψος 20000 km από την Γη (βλ. σχήμα 2.1). Αυτό σημαίνει ότι έχουν χρόνο περιφοράς 12 ώρες αστρικό χρόνο. Έτσι η εμφάνιση κάθε δορυφόρου επαναλαμβάνεται κάθε μέρα 4 λεπτά νωρίτερα, επάνω από τον ορίζοντα κάθε τόπου (Τζιαβός, 1991).



Σχήμα 2.1 Η διάταξη των δορυφόρων του GPS σε πλήρη ανάπτυξη.

Εξαιτίας του μεγάλου ύψους τους, οι τροχιές επηρεάζονται μόνο από τα κύρια χαρακτηριστικά του γήινου πεδίου βαρύτητας, με αποτέλεσμα να είναι πολύ σταθερές. Οι ατμοσφαιρικές επιδράσεις είναι αμελητέες. Οι έλξεις του Ήλιου και της Σελήνης είναι σημαντικές, αλλά μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Έτσι οι κύριες παραμένουσες επιδράσεις στη λειτουργία του συστήματος είναι η πίεση της ηλιακής ακτινοβολίας που επιδρά στις τροχιές και η καθυστέρηση των σημάτων που εκπέμπουν οι δορυφόροι, καθώς αυτά διέρχονται μέσα από την τροπόσφαιρα (Leick, 1990).

Η αρχή στην οποία στηρίζεται ο προσδιορισμός θέσης με το GPS είναι η μέτρηση των ονομαζόμενων ψευδοαποστάσεων (pseudoranges) μεταξύ τεσσάρων δορυφό-

ρων και του δέκτη. Καθώς οι συντεταγμένες των δορυφόρων σε κάποιο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς μπορούν να προσδιοριστούν από τις εφημερίδες των δορυφόρων (που οι ίδιοι τις εκπέμπουν με τα σήματά τους), από την επίλυση ενός συστήματος τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους υπολογίζονται οι συντεταγμένες του δέκτη στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Οι αγνώστοι του συστήματος είναι οι τρεις συντεταγμένες του δέκτη στο γεωκεντρικό σύστημα και το σφάλμα συγχρονισμού ανάμεσα στα χρονόμετρα των δορυφόρων και του δέκτη. Αυτή η τέταρτη ποσότητα είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί, γιατί το χρονομετρικό σύστημα των δεκτών είναι πολύ κατώτερης ακρίβειας από αυτό των δορυφόρων. Καθώς λοιπόν η απόσταση δορυφόρου δέκτη προκύπτει ως γινόμενο της ταχύτητας του φωτός (που είναι περίπου 3×10^8 m/sec) και του χρονικού διαστήματος μεταξύ εκπομπής και λήψης, ένα σφάλμα της τάξης π.χ. του χιλιοστού του δευτερολέπτου επιφέρει σφάλμα στη μέτρηση της απόστασης περίπου 300 χιλιομέτρων. Αυτός είναι ο λόγος που οι μετρήσεις ονομάζονται **ψευδοαποστάσεις**.

Για την αξιοποίηση του GPS συνεργάζονται τρία κύρια τμήματα: οι δορυφόροι, το σύστημα ελέγχου τους και οι χρήστες. Το πρώτο από αυτά περιγράφηκε συνοπτικά παραπάνω. Οι χρήστες είναι ουσιαστικά ο οποιοσδήποτε δέκτης του συστήματος τοποθετημένος είτε σταθερά είτε σε κινητό μέσο. Ενδιαφέρον είναι ότι το σύστημα μπορεί να χρησιμοποιείται ταυτόχρονα από απεριόριστο αριθμό χρηστών (Wells et al., 1986).

Το τμήμα ελέγχου αποτελείται από τον κύριο σταθμό (στο Colorado Springs στις ΗΠΑ), τους τέσσερις δευτερεύοντες σταθμούς παρακολούθησης και τις επίγειες κεραίες εκπομπής. Οι σταθμοί παρακολούθησης λαμβάνουν τα σήματα των δορυφόρων, υπολογίζουν τις αποστάσεις και τις μεταβιβάζουν μαζί με μετεωρολογικά στοιχεία στον κύριο σταθμό. Εκεί υπολογίζονται οι εφημερίδες των δορυφόρων και η συμπεριφορά των χρονομέτρων τους. Τα στοιχεία αυτά μεταβιβάζονται τέλος από τις κεραίες εκπομπής στους δορυφόρους, που τα αποθηκεύουν στη μνήμη των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων τους και τα εκπέμπουν μαζί με άλλα στοιχεία προς τη Γη.

Οι δορυφόροι του GPS εκπέμπουν σε δύο συχνότητες, στην $L1=1575.42$ Mhz και στην $L2=1227.60$ Mhz. Αυτές διαμορφώνονται με δύο κώδικες και με το ναυτιλιακό μήνυμα. Οι δύο κώδικες είναι ο C/A (coarse/acquisition code - προσεγγιστικός κώδικας) και ο P (Precise code - ακριβής κώδικας) που παρέχει και τη μεγαλύτερη ακρίβεια. Για τον προσδιορισμό του χρόνου διάδοσης του σήματος πρέπει στο δέκτη να υπάρχει ένα αντίγραφο των κωδίκων. Για να προσδιοριστεί αυτός ο χρόνος γίνεται συνεχής συσχέτιση του λαμβανομένου σήματος από το δορυφόρο, με το αντίγραφο των κωδίκων στο δέκτη μέχρι να επιτευχθεί μέγιστος βαθμός συσχέτισης.

Γενικά, τέσσερα είναι τα είδη των μετρήσεων που μπορούν να γίνουν μέσω των δορυφόρων του GPS: Μετρήσεις ψευδοαποστάσεων με τους κώδικες, μετρήσεις φάσεων των φερουσών συχνοτήτων, μετρήσεις ψευδοαποστάσεων από μεταβολές συχνότητας λόγω του φαινομένου Doppler και συμβολομετρικές μετρήσεις. Ανάλογα τώρα με το αν ο δέκτης είναι σταθερός ή κινείται, ο προσδιορισμός ονομάζεται αντίστοιχα **στατικός** ή **κινηματικός**. Τέλος όταν χρησιμοποιείται ένας μόνο δέ-

κτης, ο προσδιορισμός είναι **απόλυτος** και οι συντεταγμένες που προκύπτουν είναι στο ίδιο γεωκεντρικό σύστημα με αυτό στο οποίο υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες των δορυφόρων (στο WGS 84). Αν αντίθετα λαμβάνονται ταυτόχρονα μετρήσεις από δύο ή περισσότερους δέκτες και η θέση του ενός είναι γνωστή, ο προσδιορισμός είναι **σχετικός**. Οι συντεταγμένες τότε των υπολοίπων σημείων αναφέρονται στο ίδιο σύστημα με αυτές του γνωστού δέκτη. Ενδεικτικά αναφέρεται εδώ ότι ο σχετικός προσδιορισμός θέσης από μετρήσεις φάσεων των φερουσών συχνοτήτων μπορεί να γίνει με ακρίβεια 0.5cm + 1ppm.

Το GPS είναι ένα σύστημα που υπόσχεται πολλά για το μέλλον. Οι μεγάλες δυνατότητες που παρέχει, η ευελιξία του και η ακρίβειά του σε συνδυασμό με τη συνεχή μείωση του κόστους των δεκτών, θα καταστήσουν το GPS το κύριο σύστημα προσδιορισμού θέσης και πλοήγησης (κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις) σε ξηρά, αέρα και θάλασσα. Προβλέπεται επίσης ότι θα αντικαταστήσει τις περισσότερες από τις κλασικές μεθόδους μετρήσεων της γεωδαισίας και της τοπογραφίας.

2.2 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ GPS

2.2.1 Γενικά σχόλια

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με τον κινηματικό ή διαφορετικά δυναμικό προσδιορισμό θέσης με τη βοήθεια του GPS. Με τον όρο αυτό υπονοείται ότι ο δέκτης του συστήματος κινείται με τέτοια ταχύτητα, ώστε για κάθε στιγμή που λαμβάνεται μέτρηση, πρέπει να υπολογιστεί μία νέα θέση. Οι ουσιαστικές διαφορές αυτού του προσδιορισμού σε σχέση με το στατικό, δίνονται στη συνέχεια:

Στο στατικό προσδιορισμό θέσης έχουμε:

- σταθερό σημείο παρακολούθησης
- αποτελέσματα που δεν απαιτούνται κατά τη διάρκεια των μετρήσεων, αλλά μπορούν να προκύψουν μετά από επεξεργασία στο γραφείο
- πλεονάζουσες μετρήσεις που δίνουν δυνατότητα για συνόρθωση παρατηρήσεων, υψηλή ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Αντίθετα στο δυναμικό προσδιορισμό έχουμε:

- κινούμενο δέκτη/ όχημα
- προσδιορισμό θέσης σε σχέση με το γεωκέντρο ή σε σχέση με ένα δεύτερο σταθερό σημείο στο οποίο υπάρχει δέκτης του συστήματος
- απαίτηση για αποτελέσματα κατά τη διάρκεια των μετρήσεων (real time)
- πλεονάζουσες μετρήσεις πολύ λίγες ή συχνότερα καθόλου με συνέπεια ελαττωμένη ακρίβεια
- απαίτηση αξιοπιστίας, έτσι που συνήθως να χρειάζεται είτε φιλτράρισμα αληθούς χρόνου (όπως είναι η τεχνική του διακριτού φίλτρου Kalman), είτε συνδυασμός του GPS με κάποιο άλλο σύστημα προσδιορισμού θέσης.

Αναφορικά με το αν η λύση στην οποία οδηγούν οι μετρήσεις είναι μονοσήμαντη ή πολλαπλά ορισμένη, αυτό εξαρτάται από τον αριθμό των δορυφόρων, των οποίων τα σήματα λαμβάνει ο δέκτης και από τον αριθμό των συντεταγμένων που θέλουμε να γνωρίζουμε για το δέκτη. Θεωρώντας ότι ο δέκτης μετράει ψευδοαποστάσεις από τέσσερις δορυφόρους και χρειαζόμαστε τις τρεις γεωδαιτικές του συντεταγμένες (φ , λ , h) η λύση είναι μονοσήμαντη. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι αναγκαίο να υπολογιστεί και η απόκλιση (σφάλμα) του χρονομέτρου του δέκτη, οπότε έχουμε σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους. Μια πολύ ευνοϊκή περίπτωση είναι να λαμβάνει ο δέκτης σήματα από πέντε δορυφόρους ταυτόχρονα και να θέλουμε να προσδιορίσουμε μόνο την οριζόντια θέση (φ και λ). Έτσι από πέντε εξισώσεις προσδιορίζουμε τρεις αγνώστους (γεωδαιτικό πλάτος, μήκος και απόκλιση χρονομέτρου δέκτη) έχοντας δύο πλεονάζουσες εξισώσεις που μας επιτρέπουν να κάνουμε συνόρθωση παρατηρήσεων. Για την περίπτωση ενός μη ερευνητικού πλοίου οι ανάγκες συνίστανται μόνο στη γνώση του πλάτους και του μήκους. Όταν λοιπόν η διάταξη των δορυφόρων πάρει την τελική της μορφή, που σημαίνει την ύπαρξη τεσσάρων δορυφόρων το λιγότερο πάνω από τον ορίζοντα οποιουδήποτε τόπου της Γης όλο το εικοσιτετράωρο, ένας απλός δέκτης (με τέσσερα κανάλια) θα παρέχει μία πλεονάζουσα παρατήρηση.

Αν σκεφτεί κανείς ότι στο στατικό προσδιορισμό ο δέκτης μπορεί να λαμβάνει για πολύ ώρα μετρήσεις για το ίδιο σημείο με διάφορους συνδυασμούς "παρατηρούμενων" δορυφόρων, ενώ οι άγνωστοι είναι πάλι οι τρεις γεωδαιτικές συντεταγμένες του, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η συνόρθωση με υψηλούς βαθμούς ελευθερίας οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση της ακρίβειας και κυρίως της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων. Αυτή εξαρτάται από το αν ο προσδιορισμός είναι σχετικός ή απόλυτος και από το τι είδους μετρήσεις γίνονται. Έτσι για τον κινηματικό προσδιορισμό αυτή μπορεί να κυμαίνεται από 1 ως 30 μέτρα ή και μέχρι 100 αν χρησιμοποιείται ο κώδικας C/A σε απόλυτο εντοπισμό. Για το λόγο αυτό συχνά οι μετρήσεις παριστάνουν μία διαταραγμένη πορεία, που θα ήταν παράλογο να θεωρηθεί ως πραγματική. Ένας τρόπος αντιμετώπισης αυτού του ζητήματος είναι η εφαρμογή ενός φίλτρου στις μετρήσεις, το οποίο θα αποδίδει μία πιο ομαλή πορεία για το κινητό. Καθώς όμως στην πλοήγηση τα αποτελέσματα των μετρήσεων χρειάζονται αμέσως μετά από αυτές, το φίλτρο θα πρέπει να είναι αληθούς χρόνου (real time filter). Μια μέθοδος που συχνά χρησιμοποιείται είναι αυτή του φίλτρου Kalman, η εφαρμογή της οποίας αναλύεται στο κεφάλαιο 3.

Η ακριβής πλοήγηση στη θάλασσα είναι αναγκαία όταν εκτελούνται επιστημονικές εργασίες, όπως βυθομέτρηση, αποτύπωση του πυθμένα, πόντιση καλωδίου, γεωφυσικές διασκοπήσεις και τοποθέτηση εξέδρας. Για να αντιμετωπιστεί λοιπόν το πρόβλημα της μεγάλης αβεβαιότητας στον απόλυτο προσδιορισμό, φροντίζουμε ώστε παράλληλα με το δέκτη του GPS να λαμβάνονται μετρήσεις και με κάποιο άλλο σύστημα. Για τη ναυσιπλοΐα τα πιο συνηθισμένα από αυτά είναι τα ραδιοσημάτια (υπερβολικά, κυκλικά κ.λ.π.) και το δρομόμετρο με την πυξίδα. Για άλλες εφαρμογές, όπως είναι η από αέρα βαρυτημετρία, πολλά υπόσχεται ο συνδυασμός αδρανειακών συστημάτων (INertial Systems - INS) και GPS. Ο λόγος της υψηλής απόδοσης αυτού του συνδυασμού είναι ο εξής: Τα αδρανειακά συστήματα παρέχουν

εξαιρετική ακρίβεια, αλλά έχουν το μειονέκτημα ότι ένα σφάλμα κατά τη διάρκεια των μετρήσεων όχι μόνο παραμένει μέχρι το τέλος τους, αλλά ακόμα χειρότερα προκαλεί αντίστοιχο σφάλμα στα επόμενα αποτελέσματα, που η τιμή του αυξάνει με την πάροδο του χρόνου. Όταν λοιπόν το INS υποστηρίζεται από το GPS, το δεύτερο εξασφαλίζει για κάθε στιγμή αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα. Έτσι η ύπαρξη σφαλμάτων από το αδρανειακό σύστημα διαπιστώνεται έγκαιρα και αποφεύγεται με τον τρόπο αυτό η επίδρασή τους στις επόμενες μετρήσεις.

2.2.2 Κατηγορίες μετρήσεων

Ο κινηματικός προσδιορισμός θέσης με το GPS μπορεί να γίνει με τρεις κύριους τρόπους, ανάλογα με το είδος των παρατηρήσεων που πραγματοποιούνται. Έτσι έχουμε τον απόλυτο κινηματικό προσδιορισμό θέσης (absolute kinematic positioning), το σχετικό (relative kinematic positioning) και το συνδυασμένο κινηματικό προσδιορισμό θέσης (combined kinematic positioning). Αυτοί αναλύονται σύντομα παρακάτω και δίνονται τα μαθηματικά μοντέλα που εφαρμόζονται στον καθένα (Cannon et al., 1986).

Ο ευρύτερα χρησιμοποιούμενος τρόπος στη ναυσιπλοΐα είναι ο απόλυτος προσδιορισμός. Αυτό συμβαίνει γιατί στα μη ερευνητικά σκάφη δεν υπάρχει δυνατότητα ταυτόχρονων παρατηρήσεων από ένα δεύτερο δέκτη στην ξηρά, ώστε να έχουμε σχετικό προσδιορισμό και γιατί το κόστος δεκτών με δυνατότητα μέτρησης φάσεων της φέρουσας συχνότητας είναι μεγάλο για πλοία που δεν εκτελούν επιστημονικές εργασίες, οπότε δεν μπορεί να επιτευχθεί συνδυασμένος προσδιορισμός. Έτσι εμπορικά και αλιευτικά σκάφη χρησιμοποιούν σχεδόν αποκλειστικά δέκτες μέτρησης ψευδοαποστάσεων με τη βοήθεια του κώδικα εφαρμόζοντας το μοντέλο του απόλυτου προσδιορισμού. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι μερικοί από τους απλούς δέκτες (μετρήσεις με τη βοήθεια των κωδικών PRN) έχουν τη δυνατότητα εκτός από ψευδοαποστάσεις να αξιοποιούν και το φαινόμενο Doppler παρέχοντας ακτινικές ταχύτητες, δηλαδή τη σχετική ταχύτητα δορυφόρου-δέκτη κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τους ενώνει. Από αυτές μπορούν να υπολογίζονται και να μας παρέχουν τις συνιστώσες της ταχύτητάς τους σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Αυτό καθιστά το GPS, σύστημα το οποίο ανταποκρίνεται σε απαιτήσεις τις οποίες τα παλιότερα "συμβατικά" συστήματα εντοπισμού θέσης (Loran-C, Omega) δεν μπορούσαν να καλύψουν.

Για να δώσουμε το μαθηματικό μοντέλο του απόλυτου προσδιορισμού θεωρούμε έναν κινούμενο δέκτη που μετρά ψευδοαποστάσεις με τους κώδικες. Η εξίσωση της ψευδοαπόστασης είναι (Cannon et al., 1986):

$$pr_1^i = \rho_1^i + c(dt_{sv}^i - dt_{us1}) + d_{iono}r + d_{trop}r + d\theta^i \quad (2.1)$$

$$\rho_1^i = |R_{sv}^i - R_{us1}| \quad (2.2)$$

όπου :

pr_1^i	η παρατηρούμενη ψευδοαπόσταση μεταξύ του δορυφόρου i και του δέκτη 1 (σε μέτρα)
ρ_1^i	η γεωμετρική απόσταση μεταξύ του δορυφόρου i και του δέκτη 1 (σε μέτρα)
\mathbf{R}_{sv}^i	το διάνυσμα θέσης του δορυφόρου όπως προσδιορίζεται από τις εφημερίδες
\mathbf{R}_{us1}	το διάνυσμα θέσης του δέκτη
c	η ταχύτητα του φωτός (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο): θεωρούμε ότι με αυτή την ταχύτητα διαδίδονται τα σήματα των δορυφόρων και υπολογίζουμε στη συνέχεια ιονοσφαιρική και τροποσφαιρική διόρθωση
dt_{sv}^i	το σφάλμα χρονομέτρου του δορυφόρου i (σε δευτερόλεπτα)
dt_{us1}	το σφάλμα χρονομέτρου του δέκτη 1 (σε δευτερόλεπτα)
$d_{iono\Gamma}$	το σφάλμα στην ψευδοαπόσταση εξαιτίας της ιονοσφαιρικής διάθλασης (σε μέτρα)
$d_{trop\Gamma}$	το σφάλμα στην ψευδοαπόσταση εξαιτίας της τροποσφαιρικής διάθλασης (σε μέτρα)
$d\varrho^i$	το σφάλμα στην ψευδοαπόσταση εξαιτίας των σφαλμάτων των εφημερίδων (σε μέτρα).

Για το μοντέλο αυτό το σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου θεωρείται ότι υπολογίζεται ικανοποιητικά από τα στοιχεία της εφημερίδας του. Η ιονοσφαιρική επίδραση μπορεί να ελαχιστοποιηθεί όταν χρησιμοποιούνται δέκτες που μετρούν και στην L1 και στην L2 (δηλαδή δέκτες του κώδικα P, ο οποίος διαμορφώνεται και στις δύο συχνότητες σε αντίθεση με τον C/A, ο οποίος φέρεται μόνο από την L1). Αυτό συμβαίνει γιατί η επίδρασή της ιονόσφαιρας είναι περίπου αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της συχνότητας του σήματος, οπότε έχοντας την επίδρασή της τόσο στην L1 όσο και στην L2, μπορούμε να την υπολογίσουμε. Η τροποσφαιρική διόρθωση μπορεί να προκύψει από κάποιο μοντέλο. Τα σφάλματα στις τροχιές των δορυφόρων, όπως αυτές δίνονται από τις εφημερίδες που οι ίδιοι εκπέμπουν, αποτελούν έναν από τους κύριους παράγοντες περιορισμού της ακρίβειας με αυτή τη μέθοδο.

Ο σχετικός προσδιορισμός αναφέρεται στην περίπτωση που ένας κινητός δέκτης και ένας σταθερός σε ένα γνωστό σημείο συλλέγουν ταυτόχρονα δεδομένα από τους ίδιους δορυφόρους. Εδώ γίνεται χρήση των εξισώσεων (2.1) και (2.2) για σχετικές μετρήσεις (Cannon et al., 1986):

$$\Delta pr_{12}^i = \Delta \rho_{12}^i - c(\Delta dt_{us12}) + \Delta d_{iono\Gamma} + \Delta d_{trop\Gamma} + \Delta d\varrho^i \quad (2.3)$$

$$\Delta \rho_{12}^i = |\mathbf{R}_{sv}^i - \mathbf{R}_{us2}| - |\mathbf{R}_{sv}^i - \mathbf{R}_{us1}| \quad (2.4)$$

όπου:

- Δp_{12}^i η διαφορά ψευδοαποστάσεων μεταξύ του δορυφόρου i και των δεκτών 1 και 2 (σε μέτρα)
- $\Delta \rho_{12}^i$ η διαφορά γεωμετρικών αποστάσεων μεταξύ του δορυφόρου i και των δεκτών 1 και 2 (σε μέτρα)
- Δdt_{us12} το σχετικό σφάλμα μεταξύ των χρονομέτρων των δεκτών 1 και 2 (σε δευτερόλεπτα)
- Δd_{ionoI} η διαφορά σφαλμάτων στις ψευδοαποστάσεις εξαιτίας της ιονοσφαιρικής διάθλασης (σε μέτρα)
- Δd_{tropI} η διαφορά σφαλμάτων στις ψευδοαποστάσεις εξαιτίας της τροποσφαιρικής διάθλασης (σε μέτρα)
- $\Delta d\rho^i$ η διαφορά σφαλμάτων στις ψευδοαποστάσεις εξαιτίας των σφαλμάτων των εφημερίδων (σε μέτρα).
- R_{sv}^i , R_{us} , c όπως ορίστηκαν προηγουμένα.

Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου που υπολογίζει διαφορές μεταξύ των δεκτών, είναι ότι έτσι μειώνει τα αντίστοιχα σφάλματα των δορυφόρων. Έτσι οι διαφορές των σφαλμάτων των χρονομέτρων των δορυφόρων και των τροχιών τους $\Delta d\rho^i$ μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα για μικρές αποστάσεις. Παρόμοια οι διαφορές Δd_{ionoI} και Δd_{tropI} μπορούν να αγνοηθούν. Με τον τρόπο αυτό οι κύριες πηγές σφαλμάτων του απόλυτου κινηματικού προσδιορισμού, απομακρύνονται στο σχετικό. Ένας περιοριστικός παράγοντας για την ακρίβεια, ο οποίος παραμένει, είναι το σχετικό σφάλμα των χρονομέτρων των δεκτών Δdt_{us12} .

Το μοντέλο του συνδυασμένου κινηματικού προσδιορισμού χρησιμοποιεί τόσο παρατηρήσεις ψευδοαποστάσεων όσο και φάσεων των φερουσών συχνοτήτων. Ενώ οι μετρήσεις ψευδοαποστάσεων δίνουν καλή απόλυτη ακρίβεια αποτελεσμάτων, η στάθμη θορύβου τους (περίπου 2 μέτρα) είναι πολύ μεγάλη για προσδιορισμό ακριβείας. Αντίθετα οι μετρήσεις φάσεων έχουν αντίστοιχη στάθμη θορύβου μικρότερη κατά δύο τάξεις μεγέθους και παρέχουν αξιόπιστες πληροφορίες σχετικά με τις μεταβολές στη θέση του κινητού δέκτη. Τεχνικές φίλτραρίσματος μπορούν να εφαρμοστούν για βέλτιστο συνδυασμό των δύο τύπων δεδομένων. Σαν ένα πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση ενός περίπλοκου φίλτρου Kalman επιλέγεται μία διαδοχική συνόρθωση (συνόρθωση κατά βήματα).

Το μοντέλο για την ψευδοαπόσταση στη συνόρθωση αυτή δίνεται από την εξίσωση (2.3). Μια παρατήρηση απλών διαφορών φάσεων μεταξύ δύο δεκτών και ενός δορυφόρου για τη στιγμή t_k γράφεται ως εξής (Cannon et al., 1986):

$$\Delta \Phi_{12}^i(t_k) = \Delta \rho_{12}^i(t_k) - c \Delta dt_{us12}^i(t_k) + \lambda N_{12}^i - \Delta d_{ionoI}(t_k) + \Delta d_{tropI}(t_k) + \Delta d\rho^i(t_k) \quad (2.5)$$

όπου:

- $\Delta \Phi_{12}^i(t_k)$ η απλή διαφορά παρατηρήσεων φάσεων μεταξύ των δεκτών 1 και 2 και του δορυφόρου i για τη στιγμή t_k
- λN_{12}^i η σχετική αβεβαιότητα μεταξύ των δεκτών 1 και 2 για το δορυφόρο i
- $\Delta \rho_{12}^i(t_k)$, $\Delta dt_{us12}^i(t_k)$, $\Delta d_{ionoI}(t_k)$, $\Delta d_{tropI}(t_k)$, $\Delta d\rho(t_k)$ ορίστηκαν προηγουμένα.

Σημειώνεται εδώ πως ο όρος λN_{12}^i δεν εξαρτάται από το χρόνο, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει ολίσθηση ακεραίων κύκλων (cycle slips) *. Μια όμοια εξίσωση με την (3.5) μπορεί να γραφεί και για τη στιγμή t_{k+1} . Η διαφορά των απλών διαφορών για t_{k+1} και t_k , δίνει μία διπλή διαφορά ως εξής:

$$\delta\Delta\Phi_{12}^i = \delta\Delta Q_{12}^i - c\delta\Delta t_{us12}^i - \delta\Delta d_{iono}^i + \delta\Delta d_{trop}^i + \delta\Delta d_{\rho}^i \quad (2.6)$$

Οι όροι $\delta\Delta d_{iono}^i$, $\delta\Delta d_{trop}^i$ και $\delta\Delta d_{\rho}^i$ είναι αμελητέοι για μικρές αποστάσεις μεταξύ των δεκτών. Έτσι οι παραμένουσες άγνωστες παράμετροι στην εξίσωση (2.6) είναι οι τρεις συντεταγμένες του δέκτη και η απόκλιση του χρονομέτρου για τη στιγμή t_{k+1} και οι τρεις διαφορές συντεταγμένων και το σχετικό σφάλμα του χρονομέτρου για το χρονικό διάστημα μεταξύ t_k και t_{k+1} . Ο ολικός αριθμός αγνώστων είναι λοιπόν οχτώ: έξι συντεταγμένες, η ολίσθηση και η απόκλιση. Για ένα δέκτη που δέχεται σήματα από τέσσερις δορυφόρους, έχουμε οχτώ παρατηρήσεις: Τέσσερις ψευδοαποστάσεις για τη στιγμή t_{k+1} και τέσσερις μετρήσεις φάσεως για το διάστημα ($t_{k+1} - t_k$).

2.2.3 Ακρίβεια των αποτελεσμάτων και παράγοντες που την επηρεάζουν

Η ακρίβεια με την οποία γίνεται ο προσδιορισμός θέσης με το GPS εξαρτάται από δύο παράγοντες: Από τη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων που παρατηρούνται και την ακρίβεια των μετρήσεων (ψευδοαποστάσεων ή φάσεων). Ο πιο συνηθισμένος όρος για την ακρίβεια των μετρήσεων είναι το μέγεθος UERE (user equivalent range error), το οποίο παριστάνει τη συνδυασμένη επίδραση των αβεβαιοτήτων των εφημερίδων, των σφαλμάτων στη μετάδοση του σήματος, των σφαλμάτων των χρονομέτρων και του θορύβου στο δέκτη. Με άλλα λόγια κάθε παρατηρούμενη ψευδοαπόσταση προς ένα συγκεκριμένο δορυφόρο συνοδεύεται από ένα σφάλμα, γνωστό σαν UERE.

Η επίδραση της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων εκφράζεται από τον παράγοντα DOP (Dilution Of Precision), που είναι ο λόγος της ακρίβειας προσδιορισμού των συντεταγμένων του δέκτη προς την ακρίβεια των μετρήσεων (ψευδοαποστάσεων ή φάσεων) (Wells et al., 1986), δηλαδή:

$$\sigma = \text{DOP} \cdot \sigma_0 \quad (2.7)$$

* Πιο συγκεκριμένα λ είναι το μήκος κύματος της φέρουσας συχνότητας. Το N ως μέγεθος είναι ο αριθμός των ολόκληρων μηκών κύματος που περιλαμβάνονται μεταξύ δέκτη - δορυφόρου. Αναφέρθηκε πριν σαν αβεβαιότητα γιατί όταν ο δέκτης δέχεται σήματα από τέσσερις δορυφόρους, οι 4 αριθμοί ολοκλήρων μηκών κύματος (ένας για κάθε απόσταση) είναι πολλαπλά ορισμένοι και ο προσδιορισμός τους αποτελεί μία δύσκολη εργασία.

όπου: σ η τυπική απόκλιση μιας συντεταγμένης και σ_0 η τυπική απόκλιση των μετρήσεων. Θεωρώντας τις παρατηρήσεις ισοβαρείς και ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δηλαδή μοναδιαίο πίνακα βάρους, ισχύει ότι $\sigma_0 = \text{URE}$.

Το DOP λοιπόν είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά της γεωμετρίας του σχηματισμού στην ακρίβεια εντοπισμού. Υπάρχουν πολλά είδη DOP, ανάλογα με τη συντεταγμένη ή το συνδυασμό συντεταγμένων που αναφερόμαστε. Τα πιο κοινά DOPs δίνονται παρακάτω:

- VDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια στο υψόμετρο (Vertical)
- HDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια για τον διδιάστατο προσδιορισμό στο επίπεδο (Horizontal)
- PDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια για τον τρισδιάστατο προσδιορισμό (Position)
- TDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια στον προσδιορισμό του χρόνου (Time)
- HTDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια στον οριζόντιο προσδιορισμό και στον χρόνο μαζί (Horizontal, Time)
- GDOP · σ_0 εκφράζει την ακρίβεια στον τρισδιάστατο προσδιορισμό και στο χρόνο μαζί (Geometrical).

Όπως θα φανεί στο κεφάλαιο με τον αλγόριθμο προσδιορισμού διανύσματος θέσης, όλες αυτές οι κατηγορίες DOP είναι μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα το GDOP είναι η τετραγωνική ρίζα του ίχνους του πίνακα $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$, όπου \mathbf{A} ο πίνακας σχεδιασμού του συστήματος. Ανάλογα τώρα με το ποιο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$, ή ποιος συνδυασμός τους χρησιμοποιείται, προκύπτουν οι παραπάνω κατηγορίες DOP.

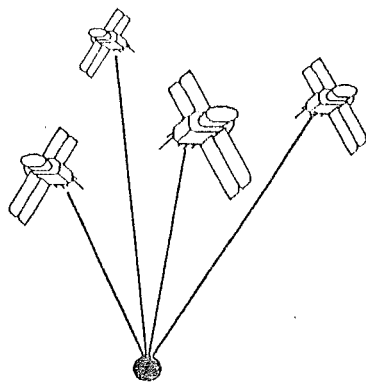
Μέχρι εδώ είδαμε τα DOP να ορίζονται αναλυτικά. Ένας άλλος τρόπος, ο οποίος συνδέεται περισσότερο με τη φυσική σημασία των μεγεθών αυτών, βασίζεται στον υπολογισμό του όγκου ενός ειδικού τετραέδρου που σχηματίζεται από τους δορυφόρους και το δέκτη. Συγκεκριμένα θεωρούμε μία μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το δέκτη. Οι τέσσερις ευθείες που ενώνουν τους δορυφόρους με το δέκτη τέμνουν τη σφαίρα αυτή σε τέσσερα σημεία της. Αυτά αποτελούν τη βάση του τετραέδρου που κορυφή του είναι ο δέκτης. Το GDOP είναι αντιστρόφως ανάλογο με τον όγκο του τετραέδρου.

Για να γίνει κατανοητή η φυσική σημασία της επίδρασης του σχηματισμού των δορυφόρων στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, πρέπει να λάβουμε υπόψη τη γεωμετρική ερμηνία της λύσης του συστήματος εξισώσεων. Αγνοώντας το σφάλμα συγχρονισμού των χρονομέτρων έχουμε τρεις ψευδοαποστάσεις από γνωστά σημεία (τους δορυφόρους) προς ένα άγνωστο (δέκτης). Η θέση του άγνωστου σημείου υλοποιείται σαν τομή τριών γεωμετρικών τόπων. Καθένας από αυτούς είναι μία σφαίρα με κέντρο το δορυφόρο και ακτίνα ίση με την απόστασή του από το δέκτη. Η τομή των δύο σφαιρών είναι ένας κύκλος και η τομή του κύκλου με την τρίτη σφαίρα είναι ένα σημείο. [Αυστηρά μαθηματικά υπάρχει και δεύτερο σημείο στο

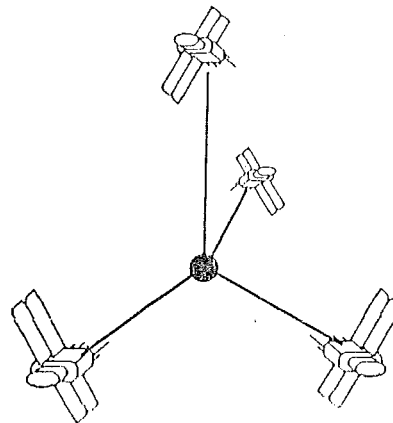
οποίο τέμνονται οι τρεις σφαίρες, αλλά είναι αντιδιαμετρικό με το σημείο του δέκτη πάνω στη Γη ως προς τους δορυφόρους και δεν υπάρχει περίπτωση σύγκυψης.]

Θεωρώντας τώρα και το σφάλμα χρονομέτρων που αγνοήσαμε πριν σαν άγνωστο, αποδεικνύεται ότι άσχημες συνθήκες προσδιορισμού έχουμε όταν οι τέσσερις δορυφόροι είναι σε κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους. Αντίθετα ως ιδανική περίπτωση θεωρείται να βρίσκεται ο ένας δορυφόρος στο ζενίθ του τόπου και οι τρεις πάνω στον ορίζοντα του τόπου απέχοντας 120° μεταξύ τους (Wells et al., 1986). Αυτό βέβαια ισχύει αν δε λάβουμε υπόψη τη διάθλαση των σημάτων στην τροπόσφαιρα, η οποία είναι μέγιστη όταν οι δορυφόροι είναι κοντά στον ορίζοντα. Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα (2.2).

ΚΑΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΚΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



Σχήμα 2.2 Καλή και κακή γεωμετρία σχηματισμού των δορυφόρων.

Όσον αφορά τους παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια των μετρήσεων των παρατηρούμενων μεγεθών (ψευδοαποστάσεων ή φάσεων), αυτοί κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την προέλευσή τους (Wells et al., 1986):

- σφάλματα σχετικά με τους δορυφόρους. Αυτά είναι οι μη ακριβείς εφημερίδες τους, η απόκλιση, η ολίσθηση και η γήρανση των χρονομέτρων τους. Τα σφάλματα αυτά είναι ασυσχέτιστα μεταξύ των δορυφόρων και επηρεάζουν τόσο τις μετρήσεις με κώδικα όσο και αυτές με τη φάση της φέρουσας συχνότητας.
- σφάλματα που προέρχονται από το δέκτη και συγκεκριμένα από το σφάλμα του χρονομέτρου του και τις ατέλειες των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.
- σφάλματα που σχετίζονται με την παρατήρηση και περιλαμβάνουν αυτά που οφείλονται στη διάδοση των σημάτων και εκείνα που εξαρτώνται από τον συ-

γκεκριμένο τύπο παρατήρησης κάθε φορά, καθώς και το θόρυβο και την επίδραση της θερμοκρασίας.

Στον απόλυτο προσδιορισμό κυριότερη πηγή σφαλμάτων είναι συνήθως το σφάλμα προσδιορισμού των τροχιών των δορυφόρων, όπως αυτές περιγράφονται από τις εφημερίδες τους. Οι θέσεις των δορυφόρων προσδιορίζονται με τον τρόπο αυτό με μία αβεβαιότητα των 20 μέτρων που μερικές φορές μπορεί να φτάσει και τα 80 μέτρα. [Ένα πρόβλημα εδώ είναι ότι τα στοιχεία που προσδιορίζουν την ελλειπτική τροχιά αναφέρονται σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα της μίας ώρας. Όταν τα στοιχεία αυτά αλλάζουν και εκπέμπονται νέα, αυτά αντιστοιχούν σε ένα τμήμα τροχιάς που η αρχή του βρίσκεται μακριά από το τέλος του προηγούμενου τμήματος. Όταν λοιπόν κατά τη διάρκεια των μετρήσεων ανανεωθεί η εφημερίδα κάποιου ή όλων των δορυφόρων που χρησιμοποιούνται έχουμε για το διάστημα κοντά στην ανανέωση λιγότερο αξιόπιστα αποτελέσματα.] Η διαφορά των ενδείξεων των χρονομέτρων των δορυφόρων από το χρόνο του συστήματος GPS θεωρείται ότι για τις εν λόγω εφαρμογές υπολογίζεται ικανοποιητικά από τα στοιχεία του ναυτιλιακού μηνύματος. Συγκεκριμένα για κάθε δορυφόρο εκπέμπονται οι τρεις συντελεστές (a_0, a_1, a_2), ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου που παρέχει τη διαφορά χρόνου κάθε δορυφόρου από το χρόνο του συστήματος.

Η επίδραση της τροπόσφαιρας υπολογίζεται επαρκώς με απλά μαθηματικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τη θερμοκρασία, την υγρασία και την πίεση στην περιοχή του δέκτη. Πρέπει όμως να αποφεύγονται παρατηρήσεις δορυφόρων πολύ κοντά στον ορίζοντα (ύψος δορυφόρου $< 15^\circ$) γιατί τότε η επίδραση αυτή είναι μεγάλη. Η ιονόσφαιρα δημιουργεί περισσότερες δυσκολίες γιατί η επίδρασή της εξαρτάται από τη θέση του δέκτη, την ώρα της ημέρας, την εποχή του έτους και το ύψος του δορυφόρου. Στους δέκτες δύο συχνότητων υπολογίζεται με πολύ καλή ακρίβεια. Σ' αυτούς όμως με μία συχνότητα μπορούμε με διάφορα μοντέλα να εξαλείψουμε μόνο το μισό αυτής της επίδρασης. Γι' αυτό το λόγο διάφοροι ερευνητές στη συνόρθωση των παρατηρήσεων εισάγουν ένα επιπλέον άγνωστο, που σχετίζεται με την ιονοσφαιρική διόρθωση.

Ένας παράγοντας που επηρεάζει την ακρίβεια των παρατηρήσεων είναι ορισμένα φαινόμενα συμβολής στην κεραία, σημάτων που προέρχονται από πολλές διευθύνσεις (multipath effect). Εκτός δηλαδή από το σήμα που φτάνει στην κεραία απ' ευθείας από το δορυφόρο φτάνουν εκεί και άλλα που έχουν ανακλασθεί σε διάφορες επιφάνειες στην περιοχή του δέκτη. Το πρόβλημα περιορίζεται με χρήση κεραίων συγκεκριμένου σχήματος.

Το πιο σημαντικό φαινόμενο για τη λειτουργία του GPS ως αυτόνομου κινηματικού συστήματος όταν γίνονται μετρήσεις φάσεων είναι η ολίσθηση των ακεραίων κύκλων (cycle slips). Όταν η λήψη σημάτων από ένα δορυφόρο διακοπεί στιγμιαία για οποιοδήποτε λόγο, δε γίνεται να συνεχιστεί αμέσως μετά. Αντίθετα το κλασματικό μέρος της μετρούμενης φάσης θα είναι το ίδιο με αυτό πριν τη διακοπή. Προκύπτει έτσι μία ασυνέχεια για τον αριθμό των ακεραίων κύκλων που μετρά ο δέκτης (Wells et al., 1986). Το φαινόμενο της ολίσθησης των κύκλων εμφανίζεται μόνο όταν γίνονται μετρήσεις φάσεως και ποτέ σε παρατηρήσεις ψευδοαποστά-

σεων. Για την αντιμετώπιση αυτού του σοβαρού θέματος έχουν προταθεί διάφορες λύσεις, οι περισσότερες από τις οποίες έχουν να κάνουν με την επεξεργασία των μετρήσεων.

Έχοντας μέχρι τώρα αναφερθεί στους τύπους παρατήρησης για κινηματικό προσδιορισμό, στη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων και στην ακρίβεια των μετρήσεων, μπορούμε να μιλήσουμε γενικά για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η διαφορά στην ακρίβεια των κινηματικών μοντέλων συνδέεται στενά με τις ικανότητες των αντίστοιχων οργάνων. Ο πίνακας (2.1) δίνει συνοπτικά τη σχέση μεταξύ των παραπάνω (Wells, 1986). Στον πίνακα (2.2) δίνονται οι αντίστοιχες τιμές για το στατικό προσδιορισμό θέσης (Μανιάτης, Παραδείσης 1991), προκειμένου να γίνει αισθητή η διαφορά ακρίβειας μεταξύ κινηματικού και στατικού εντοπισμού.

Μοντέλο	Απαίτηση σε εξοπλισμό	Ακρίβεια (τυπική απόκλιση σε μέτρα)
ΑΠΟΛΥΤΟ		
ψευδοαποστάσεων	1 δέκτης C/A κώδικα	20 - 30
συνδυασμένο	1 δέκτης P κώδικα	15 - 20
υποβοηθούμενο	1 δέκτης κώδικα και φάσεων	15 - 20
	1 δέκτης και αδρανειακό σύστημα	15 - 20
ΣΧΕΤΙΚΟ		
ψευδοαποστάσεων	2 δέκτες	5 - 10
συνδυασμένο	2 δέκτες	0.5 - 1.5
υποβοηθούμενο	2 δέκτες και αδρανειακό σύστημα	0.2 - 0.3

Πίνακας 2.1 Ακρίβεια του δυναμικού προσδιορισμού θέσης με GPS και απαιτήσεις σε εξοπλισμό. (Για τη διάταξη των δορυφόρων του GPS του 1986).

Μοντέλο	Απαίτηση σε εξοπλισμό	Ακρίβεια (τυπική απόκλιση σε μέτρα)
ΑΠΟΛΥΤΟ		
ψευδοαποστάσεων	1 δέκτης C/A κώδικα	2 - 5
	1 δέκτης P κώδικα	2
ΣΧΕΤΙΚΟ		
ψευδοαποστάσεων	2 δέκτες C/A κώδικα	5 - 2
ψευδοαποστάσεων	2 δέκτες P κώδικα	0.3 - 0.5
φάσεων	2 δέκτες φάσεων	0.05 - 1 ppm

Πίνακας 2.2 Ακρίβεια του στατικού προσδιορισμού θέσης με GPS και απαιτήσεις σε εξοπλισμό. (Για τη διάταξη των δορυφόρων του GPS του 1986).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί εδώ ότι οι τιμές του πίνακα (2.1) είναι σήμερα διαφορετικές. Αυτό συμβαίνει γιατί η ποιότητα των δεκτών έχει βελτιωθεί και ο αριθμός των δορυφόρων του GPS είναι μεγαλύτερος. Αυτά συνηγορούν στη βελτίωση της ακρίβειας. Από την άλλη πλευρά όμως, έχει γίνει από την 1 Ιουλίου 1991 αξιοποίηση της "επιλεκτικής διαθεσιμότητας" (selective availability). Αυτή είναι μία δυνατότητα που έχουν οι επιχειρησιακοί δορυφόροι του GPS, δηλαδή αυτοί που συμπληρώνουν τους αρχικούς πειραματικούς δορυφόρους. Με την επιλεκτική διαθεσιμότητα ο κεντρικός σταθμός ελέγχου του συστήματος, μπορεί να υποβιβάζει την ακρίβεια που παρέχει ο C/A κώδικας με εισαγωγή θορύβου στο εκπεμπόμενο σήμα και στη φέρουσα συχνότητα και να υποβαθμίζει την ακρίβεια της εκπεμπόμενης τροχιάς. Το αποτέλεσμα αυτής της κατάστασης είναι ότι σήμερα η παρεχόμενη από τον C/A κώδικα ακρίβεια είναι 100 μέτρα για το 95% του χρόνου, από 25 μέτρα περίπου που ήταν πριν τον Ιούλιο του 1991 (Παραδείσης 1992). Αυτό που αξίζει να σημειωθεί εδώ είναι ότι το πρόβλημα δεν είναι τόσο οξύ όπως αρχικά θα μπορούσε να φανεί. Κατά πρώτο λόγο η ποιότητα του P κώδικα δεν έχει υποβαθμιστεί. Εξάλλου η κακή ποιότητα των στοιχείων της εφημερίδας ξεπερνιέται σχεδόν τελείως όταν γίνεται σχετικός προσδιορισμός θέσης, γιατί τότε τα σφάλματα των τροχιών εξαλείφονται. Έτσι για τον P κώδικα οι τιμές του πίνακα είναι σήμερα γενικά μικρότερες ενώ για τον C/A γενικά μεγαλύτερες.

2.2.4 Εφαρμογές

Οι κινηματικές εφαρμογές του GPS είναι πάρα πολλές και συνεχώς επινοούνται καινούργιες. Εδώ θα δούμε τις σημαντικότερες με κριτήριο ταξινόμησής τους την ακρίβεια (τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων). Διακρίνουμε έτσι τρεις κύριες κατηγορίες. Στην πρώτη ανήκουν εφαρμογές χαμηλής ακρίβειας, δηλαδή της τάξης των 20 - 30 μέτρων, για τις οποίες είναι αρκετός ο απόλυτος κινηματικός προσδιορισμός. Η δεύτερη περιλαμβάνει εφαρμογές μέσης ακρίβειας της τάξης των 5 - 10 μέτρων με απαίτηση για σχετικές μετρήσεις ψευδοαπόστασεων. Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν εφαρμογές υψηλής ακρίβειας της τάξης 0.2 έως 2.0 μέτρων ή και καλύτερης ακόμη. Αυτές πραγματοποιούνται με σχετικές μετρήσεις φάσεως, σχετικές συνδυασμένες μετρήσεις ή σχετικές μετρήσεις υποβοηθούμενες από άλλο σύστημα (συνήθως αδρανειακό).

Οι εφαρμογές χαμηλής ακρίβειας είναι επαρκείς για τις περισσότερες συμβατικές ανάγκες πλοήγησης σε αέρα και θάλασσα και απλοποιούν σε σημαντικό βαθμό τις παλαιότερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους προσδιορισμού στις από αέρα γεωφυσικές έρευνες.

Στην ξηρά έχει προταθεί η συνεργασία ενός δέκτη GPS και ενός ηλεκτρονικού χάρτη με σκοπό τον εντοπισμό στίγματος και την ανεύρεση του συντομότερου δρόμου για τον προσδιορισμό του οχήματος, που μπορεί να είναι ασθενοφόρο, φορτηγό, ταξί ακόμα και τρένο (για την παροχή θέσης κατά μήκος των σιδηροτροχιών). Για

την ανοικτή θάλασσα η ακρίβεια του GPS και η διαθεσιμότητά του το κάνει να υπερέχει απέναντι στα κλασικά συστήματα. Σ' αυτό συντελεί και το μικρό πλέον κόστος ενός δέκτη C/A κώδικα, το οποίο δεν υπερβαίνει σήμερα τις 350000 δραχμές.

Όσον αφορά τις εφαρμογές μέσης ακρίβειας, το GPS είναι πια το κύριο σύστημα προσδιορισμού θέσης όταν εκτελούνται υδρογραφικές εργασίες, όπως για παράδειγμα βυθομετρήσεις. Επειδή απαιτούνται συντεταγμένες σε αληθή χρόνο, είναι εδώ σημαντική μία ραδιοζεύξη μεταξύ του πλοίου και σταθερού δέκτη.

Στις εφαρμογές υψηλής ακρίβειας χρησιμοποιώντας μοντέλο φάσεων, συνδυασμένο ή υποβοηθούμενο, το GPS δίνει λύση σε πλήθος προβλημάτων τα οποία δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με τις παλιότερες συμβατικές μεθόδους. Οι πιο ενδεικτικές περιπτώσεις είναι αεροτριγωνισμός χωρίς επίγειο έλεγχο, από αέρος βαρυτημετρία και βαθμιδομετρία και απ' ευθείας προσδιορισμός του διανύσματος της βαρύτητας και του γεωειδούς από ένα κινούμενο όχημα. Το GPS απλοποιεί επίσης επίπονες εργασίες, όπως αποτύπωση του πυθμένα των θαλασσών και εξερεύνηση των κατωτέρων στρωμάτων του με την τεχνική κατά την οποία προκαλούνται από ένα πλοίο εκρήξεις σε μικρό βάθος και τα ανακλώμενα σήματα λαμβάνονται από υδρόφωνα.

2.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΘΕΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επεξεργασία των δεδομένων μετρήσεων ενός δέκτη GPS, ο οποίος μετρά ψευδοαποστάσεις με τον P- κώδικα χρησιμοποιώντας και τις δύο συχνότητες του συστήματος: την L1 και την L2. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να παραθέσει όλο το μαθηματικό μοντέλο που είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του δέκτη (van Dierendonck et al., 1980) και να δείξει αναλυτικά την επιμέρους διαδοχική πορεία του αλγορίθμου.

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, οι μετρήσεις με τον P- κώδικα σε δύο συχνότητες παρέχουν ακριβέστερα αποτελέσματα από τις μετρήσεις που γίνονται σε μία συχνότητα και τις μετρήσεις με τον κώδικα C/A. Ο αλγόριθμος χωρίζεται σε τρία μέρη. Πρώτα υπολογίζονται οι συντεταγμένες των δορυφόρων στο γήινο σύστημα αναφοράς από τις εφημερίδες του ναυτιλιακού μηνύματος, στη συνέχεια προσδιορίζονται οι απαραίτητες διορθώσεις και τέλος ακολουθεί η επίλυση του συστήματος εξισώσεων για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του δέκτη. Σύστημα αναφοράς συντεταγμένων είναι το γεωκεντρικό WGS 84 (World Geodetic System 1984).

ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$\pi = 3.1415926535898$	
$c = 299792458.0 \text{ m/ sec}$	Ταχύτητα του φωτός στο κενό
$f_1 = 1575.42 \text{ Mhz}$	Συχνότητα του φέροντος κύματος L1
$f_2 = 1227.60 \text{ Mhz}$	Συχνότητα του φέροντος κύματος L2
$GM = 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$	Γεωκεντρική σταθερά βαρύτητας του WGS 84
$\dot{\Omega}_e = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/ sec}$	Γωνιώδης ταχύτητα περιστροφής της Γης για το WGS 84
$a = 6378137.0 \text{ m}$	Μεγάλος ημιάξονας του ΕΕΠ του WGS 84
$f = 1/298.2572235630$	Επιπλάτυνση του ΕΕΠ του WGS 84

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

$pr = c (t_{us} - t_{sv}) - \delta_{iono}r - \delta_{trop}r$	Παρατηρούμενη ψευδοαπόσταση
$pr = R_{us} - R_{sv} + c (\delta t_{us} - \delta t_{sv}) - v$	Εξίσωση παρατήρησης
$R_{sv} = [X_{sv} \ Y_{sv} \ Z_{sv}]^T$	Διάνυσμα θέσης του δορυφόρου τη στιγμή της εκπομπής του σήματος
$R_{us} = [X_{us} \ Y_{us} \ Z_{us}]^T$	Διάνυσμα θέσης της κεραίας του δέκτη τη στιγμή της λήψης του σήματος
$t_{sv}[\text{sec}] = Z \cdot 1.5 + \frac{X+P \cdot 2^{-16}}{10.23 \cdot 10^6}$	Χρόνος εκπομπής του σήματος υπολογιζόμενος από τα δεδομένα καταγραφής ZXP του δέκτη
t_{us}	Χρόνος λήψης του σήματος από το δέκτη.

Όπως θα φανεί και στη συνέχεια οι ψευδοαποστάσεις pr δεν είναι μεγέθη άμεσα μετρήσιμα από το δέκτη αλλά υπολογίζονται από τις ποσότητες t_{us} , t_{sv} , $\delta_{iono}r$ και $\delta_{trop}r$. Ο δείκτης us (user) αντιστοιχεί στο χρήστη και ο sv (spacevehicle) στο δορυφόρο.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΔΟΡΥΦΟΡΩΝ ΤΟΥ GPS

$\delta_{clk}t = a_0 + a_1(t - t_{oc}) + a_2(t - t_{oc})^2$	Σφάλμα χρονομέτρου του δορυφόρου
$t = t_{sv} - \delta_{clk}t$	Χρόνος GPS της στιγμής εκπομπής

$t_k = t - t_{oe}$	Χρονικό διάστημα από τη στιγμή αναφοράς των στοιχείων της εφημερίδας
$A = (A^{1/2})^2$	Μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς
$n_o^2 = GM / A^3$	Μέση κίνηση του δορυφόρου (τρίτος νόμος του Kepler)
$n = n_o + \Delta n$	Μέση κίνηση διορθωμένη
$M_k = M_o + n \cdot t_k$	Μέση ανωμαλία
$E_k = M_k + e \cdot \sin E_k$	Έκκεντρη ανωμαλία
$\cos v_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e \cos E_k}$	Συνημίτονο της αληθούς ανωμαλίας
$\sin v_k = \frac{\sin E_k \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E_k}$	Ημίτονο της αληθούς ανωμαλίας
$\varphi_k = v_k + \omega$	Όρισμα του πλάτους
$\delta u_k = C_{uc} \cos 2\varphi_k + C_{us} \sin 2\varphi_k$	
$\delta r_k = C_{rc} \cos 2\varphi_k + C_{rs} \sin 2\varphi_k$	Αρμονικές διορθώσεις
$\delta i_k = C_{ic} \cos 2\varphi_k + C_{is} \sin 2\varphi_k$	
$u_k = \varphi_k + \delta u_k$	Όρισμα του πλάτους διορθωμένο
$r_k = A (1 - e \cos E_k) + \delta r_k$	Ακτίνα της τροχιάς διορθωμένη
$i_k = i_o + \dot{i} t_k + \delta i_k$	Κλίση της τροχιάς διορθωμένη
$\xi_k = r_k \cos u_k$	
$\eta_k = r_k \sin u_k$	Συντεταγμένες στο επίπεδο της τροχιάς
$\Omega_k = \Omega_o + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$	Διορθωμένο μήκος του συνδέσμου αναβιβασμού
$X_k = \xi_k \cos \Omega_k - \eta_k \sin \Omega_k \cos i_k$	
$Y_k = \xi_k \sin \Omega_k + \eta_k \cos \Omega_k \cos i_k$	Γεωκεντρικές συντεταγμένες του δορυφόρου στο γήινο σύστημα αναφοράς.
$Z_k = \eta_k \sin i_k$	

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Διόρθωση των συντεταγμένων του δορυφόρου λόγω περιστροφής της Γης, με στροφή του συστήματος αναφοράς.

$$X_{sv} = X_k \cos \delta\Omega_e + Y_k \sin \delta\Omega_e$$

$$Y_{sv} = Y_k \cos \delta\Omega_e - X_k \sin \delta\Omega_e \quad \text{Στροφή του συστήματος αναφοράς}$$

$$Z_{sv} = Z_k$$

$$\delta\Omega_e = \dot{\Omega}_e \cdot \tau \quad \text{Γωνία περιστροφής της Γης από τη στιγμή της εκπομπής μέχρι τη λήψη του σήματος}$$

$$\tau \quad \text{Χρονικό διάστημα μετάδοσης του σήματος}$$

Διόρθωση λόγω σχετικιστικών φαινομένων.

$$\delta_{rel}t = -4.443 \cdot 10^{-10} [\text{sec}/\text{m}^{1/2}] e A^{1/2} \sin E_k$$

$$\delta t_{sv} = \delta_{clk}t + \delta_{rel}t \quad \text{Σφάλμα χρονομέτρου του δορυφόρου διορθωμένο}$$

Διόρθωση λόγω ιονοσφαιρικής διάθλασης.

$$\delta_{iono}t_1 = c \frac{t_{2sv} - t_{1sv}}{1 - (f_1/f_2)^2} \quad \text{Διόρθωση για τη συχνότητα L1}$$

$$\delta_{iono}t_2 = c \frac{t_{1sv} - t_{2sv}}{1 - (f_2/f_1)^2} \quad \text{Διόρθωση για τη συχνότητα L2}$$

Διόρθωση λόγω διάθλασης του δορυφορικού σήματος στην τροπόσφαιρα.

$$\delta_{trop}t = K_D P \frac{1}{\sin(E^2 + 2.05^2)^{1/2}} + K_w \frac{1}{\sin(E^2 + 1.05^2)^{1/2}}$$

E Γωνία ύψους του δορυφόρου σε μοίρες (πάνω από τον ορίζοντα)

P Ατμοσφαιρική πίεση σε Hectopascal

$$K_D = 2.278 \cdot 10^{-10} \text{ m/hPa}$$

K_w	Σταθερά για τις διάφορες εποχές του έτους
	καλοκαίρι και τροπικά κλίματα $K_w = 0.28$ m
	άνοιξη και φθινόπωρο $K_w = 0.20$ m
	χειμώνας $K_w = 0.12$ m
	αρκτικό κλίμα $K_w = 0.05$ m

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

$\mathbf{L} = [pr_1 \ pr_2 \ pr_3 \ pr_4]^T$	Διάνυσμα των παρατηρήσεων
$\mathbf{X} = [X_{us} \ Y_{us} \ dt_{us}]^T$	Διάνυσμα των αγνώστων
\mathbf{X}^o	Διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
\mathbf{L}^o	Διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των παρατηρήσεων
$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^o$	Διάνυσμα των διαφορών των αγνώστων παραμέτρων από τις προσεγγιστικές τιμές τους
$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}^o$	Διάνυσμα των ανηγμένων παρατηρήσεων
$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}$	Γραμμικοποιημένη εξίσωση παρατήρησης
$A_{ij} = \frac{\partial pr_i}{\partial X_j}$	Στοιχεία του πίνακα σχεδιασμού
$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{l}$	Λύση του συστήματος
\mathbf{Q}_{ll}	Πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων
$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$	Πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων
$[\varphi \ \lambda \ h]^T$	Ελλειψοειδείς συντεταγμένες του δέκτη
$\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T$	Πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των ελλειψοειδών συντεταγμένων
$\mathbf{F} = \frac{\partial [\varphi \ \lambda \ h]^T}{\partial [X \ Y \ Z]^T}$	Ιακωβιανός πίνακας που συνδέει τις ελλειψοειδείς με τις καρτεσιανές γεωκεντρικές συντεταγμένες

2.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο είναι απαραίτητη η γνώση των στοιχείων των ναυτιλιακών μηνυμάτων των δορυφόρων καθώς και αυτών που υπολογίζονται από το δέκτη. Αυτά είναι οι τιμές των ZXP για κάθε δορυφόρο, οι κωδικοί αριθμοί αναγνώρισης των δορυφόρων και ο χρόνος GPS της λήψης των σημάτων. Στη συνέχεια παρατίθενται τα στοιχεία του ναυτιλιακού μηνύματος και του δέκτη (πίνακες 2.2 - 2.4), και γίνεται μία σύντομη επεξήγησή τους. Όλα τα δεδομένα προέρχονται από πραγματικές μετρήσεις με ένα δέκτη 4100 της Texas Instruments.

SUBFRAME 1 SV-PRN 6			
TLM	.000000000000000E+00		
HOW	.388836000000000E+06		
WN	.284000000000000E+03		
C-P-L2	.100000000000000E+01		
URA	.300000000000000E+01		
HEALTH	.000000000000000E+00		
AODC	.532480000000000E+05		
L2-P-FLAG	.000000000000000E+00		
TGD	-.232830643653869E-08		
TGC	.396000000000000E+06		
A2	.000000000000000E+00		
A1	-.111413100967183E-10		
A0	-.159820076078176E-03		
SUBFRAME 2		SUBFRAME 3	
TLM	.000000000000000E+00	TLM	.000000000000000E+00
HOW	.388842000000000E+06	HOW	.388818000000000E+06
AODE	.532480000000000E+05	CIC	-.186264514923095E-07
CRS	-.248437500000000E+02	OMO	.208360355168560E+01
DN	.140970157687194E-08	CIS	-.121071934700012E-06
MO	.989568977782818E+00	IO	.111784815920563E+01
CUC	-.160001218318939E-05	CRC	.413531250000000E+03
E	.381415453739464E-02	OMP	.205161393813836E+01
CUS	.215508043766021E-05	OMDOT	-.663134765081868E-08
SQRT-A	.515367850112915E+04	AODE	.532480000000000E+05
TOE	.396000000000000E+06	IDOT	-.228938107619689E-09
SUBFRAME 1 SV-PRN 8			
TLM	.000000000000000E+00		
HOW	.388836000000000E+06		
WN	.284000000000000E+03		
C-P-L2	.100000000000000E+01		
URA	.300000000000000E+01		
HEALTH	.000000000000000E+00		
AODC	.532480000000000E+05		
L2-P-FLAG	.000000000000000E+00		
TGD	-.139698386192322E-08		
TGC	.396000000000000E+06		
A2	.000000000000000E+00		
A1	.418367562815546E-10		
A0	.143105164170265E-03		
SUBFRAME 2		SUBFRAME 3	
TLM	.000000000000000E+00	TLM	.000000000000000E+00
HOW	.388842000000000E+06	HOW	.388818000000000E+06
AODE	.532480000000000E+05	CIC	.745058059692382E-08
CRS	-.247812500000000E+02	OMO	-.206718806160598E+01
DN	.138434337774402E-08	CIS	-.204890966415405E-07
MO	.265930321645887E+01	IO	.110373807002377E+01
CUC	-.131316483020782E-05	CRC	.256968750000000E+03
E	.426896091084927E-02	OMP	-.431351696078118E+00
CUS	.996328890323638E-05	OMDOT	-.602025076760918E-08
SQRT-A	.515370047569275E+04	AODE	.532480000000000E+05
TOE	.396000000000000E+06	IDOT	.617882880159224E-09

Πίνακας 2.3 Τα στοιχεία των ναυτιλιακών μηνυμάτων για τους δορυφόρους 6 και 8.

SUBFRAME 1 SV-PRN 11
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388836000000000E+06
 WN .284000000000000E+03
 C-P-L2 .100000000000000E+01
 URA .200000000000000E+01
 HEALTH .000000000000000E+00
 AODC .512000000000000E+05
 L2-P-FLAG .000000000000000E+00
 TGD -.325962901115417E-08
 TOC .396000000000000E+06
 A2 .000000000000000E+00
 A1 .329691829392686E-10
 A0 .436506274109401E-04

SUBFRAME 2
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388842000000000E+06
 AODE .512000000000000E+05
 CRS -.260625000000000E+02
 DN .141255883874551E-08
 MO -.203843170328537E+01
 CUC -.141747295856476E-05
 E .106373827438801E-01
 CUS .103469938039780E-04
 SQRT-A .515367370986939E+04
 TOE .396000000000000E+06

SUBFRAME 3
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388818000000000E+06
 CIC -.819563865661620E-07
 OMO -.208072130755999E+01
 CIS -.137835741043091E-06
 IO .109691600025718E+01
 CRC .246812500000000E+03
 OMP -.278339243665583E+01
 OMDOT -.599989277676000E-08
 AODE .512000000000000E+05
 IDOT .798247535928246E-09

SUBFRAME 1 SV-PRN 12
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388836000000000E+06
 WN .284000000000000E+03
 C-P-L2 .100000000000000E+01
 URA .400000000000000E+01
 HEALTH .000000000000000E+00
 AODC .430080000000000E+05
 L2-P-FLAG .000000000000000E+00
 TGD .000000000000000E+00
 TOC .396000000000000E+06
 A2 .000000000000000E+00
 A1 .648014975013210E-11
 A0 .150890089571476E-03

SUBFRAME 2
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388842000000000E+06
 AODE .430080000000000E+05
 CRS -.194687500000000E+02
 DN .174221542740849E-08
 MO .269381755889691E+01
 CUC -.823289155960082E-06
 E .820978370029479E-02
 CUS .143423676490784E-05
 SQRT-A .515363212585449E+04
 TOE .396000000000000E+06

SUBFRAME 3
 TLM .000000000000000E+00
 HOW .388818000000000E+06
 CIC .104308128356933E-06
 OMO .209279414872800E+01
 CIS .484287738800048E-07
 IO .110572371795113E+01
 CRC .421312500000000E+03
 OMP -.116938352277486E+01
 OMDOT -.673313760506456E-08
 AODE .430080000000000E+05
 IDOT -.217509060125415E-09

Πίνακας 2.4 Τα στοιχεία των ναυτιλιακών μηνυμάτων για τους δορυφόρους 11 και 12.

284	389294.00	6	8	11	12		
6	259529	4454090	-9537	259529	4454090	-13897	
8	259529	4408986	-2032	259529	4408986	-5616	
11	259529	4400174	-8800	259529	4400174	-17104	
12	259529	4414627	16452	259529	4414627	12128	

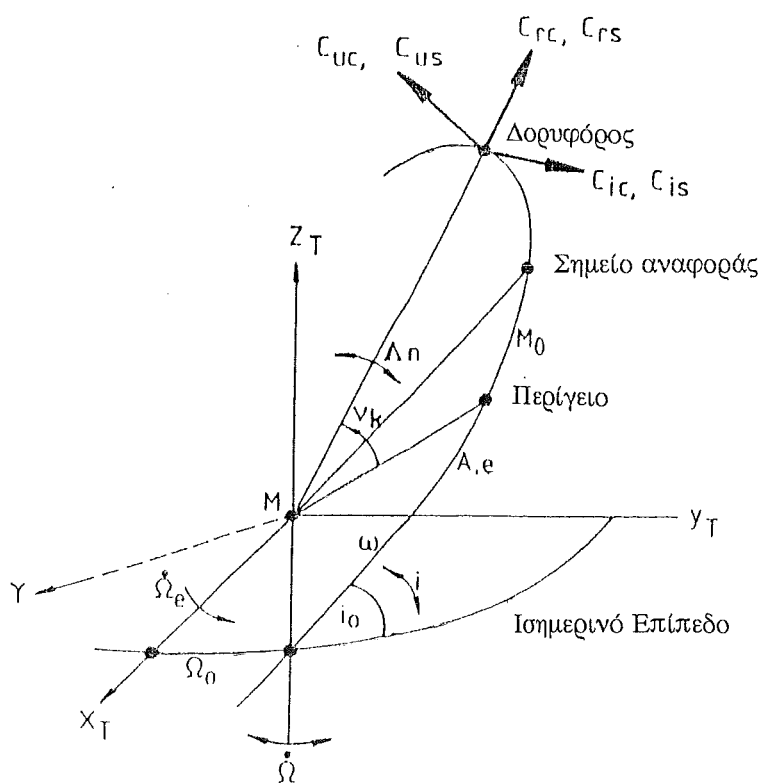
Πίνακας 2.5 Τα στοιχεία καταγραφής του δέκτη.

2.4.1 Ανάλυση των στοιχείων του δέκτη και του ναυτιλιακού μηνύματος των δορυφόρων

Τα στοιχεία που καταγράφει ο δέκτης είναι ο αριθμός της εβδομάδας του GPS (WN), ο χρόνος λήψης του σήματος, οι κωδικοί των παρατηρούμενων δορυφόρων και οι αριθμοί Z, X, P. Αυτοί οι τελευταίοι είναι τρεις για κάθε δορυφόρο και για κάθε συχνότητα, δηλαδή συνολικά εικοσιτέσσερις για την περίπτωση που λαμβάνονται σήματα από τέσσερις δορυφόρους. Από αυτούς υπολογίζεται ο χρόνος του δορυφόρου τη στιγμή της εκπομπής.

Το ναυτιλιακό μήνυμα έχει διάρκεια 30 δευτερολέπτων και ρυθμό μετάδοσης πληροφοριών 50 bps (bits per second). Χωρίζεται σε πέντε τμήματα διάρκειας έξι δευτερολέπτων, καθένα από τα οποία αποτελείται από δέκα λέξεις. Το πρώτο τμήμα αποτελεί το block I του μηνύματος και περιέχει παραμέτρους που αφορούν το χρονόμετρο του δορυφόρου. Το δεύτερο και τρίτο τμήμα συνιστούν το block II, που περιλαμβάνει τα στοιχεία των εφημερίδων. Το τέταρτο και πέμπτο τμήμα αποτελούν το block III, που περιέχει συνοπτικά στοιχεία τα οποία χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των χρονομέτρων και τις εφημερίδες όλων των δορυφόρων του συστήματος GPS, καθώς και στοιχεία για τη διόρθωση του χρόνου διάδοσης του σήματος λόγω της ιονόσφαιρας.

Στη συνέχεια επεξηγούνται τα στοιχεία που περιλαμβάνονται στα block I και block II και τα οποία είναι επαρκή για την εφαρμογή του αλγορίθμου. Το σχήμα (2.3) αναπαριστά την τροχιά του δορυφόρου στο χώρο και περιγράφει τα στοιχεία που την προσδιορίζουν.



Σχήμα 2.3 Περιγραφή της τροχιάς των δορυφόρων του GPS.

TLM	(Telemetry) Είναι η πρώτη λέξη σε κάθε τμήμα του μηνύματος και περιέχει πληροφορίες που χρειάζονται στους επίγειους σταθμούς ελέγχου του συστήματος.
HOW	(Hand Over Word) Για την πρόσβαση στον P- κώδικα απαιτείται ικανότητα του δέκτη πολύ ακριβούς συγχρονισμού του με το χρόνο GPS και γνώση της θέσης της κεραίας του με μία ακρίβεια της τάξης των 3 - 6 χιλιομέτρων. Γενικά η πρόσβαση γίνεται πιο εύκολη μέσω του κώδικα C/A και σ' αυτό συνεισφέρει το μέγεθος HOW.
WN	(Week Number) Ο χρόνος του συστήματος GPS δίνεται ως ένα ακέραιο πλήθος εβδομάδων και ένας αριθμός δευτερολέπτων για την τρέχουσα εβδομάδα από 0 έως 604800 (δηλαδή το σύνολο των δευτερολέπτων της εβδομάδας). Το μέγεθος WN ισούται με τον αριθμό των εβδομάδων που έχουν περάσει από την αρχή του χρόνου GPS, δηλαδή από την 5η Ιανουαρίου 1980 0 UTC.
C- P- L2	Κωδικός αριθμός που δείχνει αν χρησιμοποιείται ο κώδικας C/A ή ο P. Οι αντίστοιχοι κωδικοί είναι 1 και 10.
URA	Χαρακτηρίζει την προβλεπόμενη ακρίβεια μέτρησης από κάθε δορυφόρο. Ο χρήστης πρέπει να θεωρεί ότι δε θα έχει στη μέτρηση καλύτερη ακρίβεια από την τιμή του URA.
HEALTH	Χαρακτηρίζει τη συνολική ποιότητα των δεδομένων του ναυτιλιακού μηνύματος, όπου 0 αντιστοιχεί σε καλή ποιότητα όλων των στοιχείων και 1 υποδεικνύει ότι κάποια από αυτά δεν είναι αξιόπιστα.
AODC	(Age of Data, Clock) Παρέχει το χρόνο GPS, που πέρασε από την τελευταία μέτρηση που έκανε το τμήμα ελέγχου για την ανανέωση των παραμέτρων που αφορούν το χρονόμετρο του δορυφόρου. Αυτοί υπολογίζονται για κάθε μία ώρα και θεωρείται ότι παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια όταν χρησιμοποιούνται για την περίοδο 30 λεπτά πριν και 30 λεπτά μετά από το χρόνο αναφοράς τους (TOC).
L2- P- FLAG	Κωδικός 0 ή 1 ανάλογα αν το ναυτιλιακό μήνυμα μεταδίδεται ή όχι μαζί με τον κώδικα P στη συχνότητα L2.
TGD	Δίνει τη διόρθωση L1- L2 για χρήση από κατόχους δεκτών μόνο της L1 συχνότητας ή μόνο της L2.
TOC	(Time Of Clock) Είναι ο χρόνος GPS αναφοράς των παραμέτρων του χρονομέτρου του δορυφόρου, δηλαδή της απόκλισης, της ολίσθησης και της γήρανσής του.
A2 A1 A0	Οι τρεις όροι του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου που παρέχει τη διαφορά του χρονομέτρου του δορυφόρου από το χρόνο του συστήματος GPS. Αντιστοιχούν στη γήρανση, την ολίσθηση και την απόκλιση.
AODE	(Age Of Data, Ephemeris) Αντιπροσωπεύει το διάστημα μεταξύ του χρόνου αναφοράς της εφημερίδας (TOE) και της τελευταίας μέτρησης που χρησιμοποιήθηκε από το σύστημα ελέγχου για τον υπολογισμό των παραμέτρων της τροχιάς. Είναι το αντίστοιχο για την εφημερίδα μέγεθος με το AODC.

CRS	Πλάτος του ημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στην ακτίνα της τροχιάς. Αυτός και επόμενοι οχτώ όροι μετατρέπουν την κεπλέρια ελλειπτική τροχιά στην πραγματική διαταραγμένη τροχιά που εκτελεί ο δορυφόρος λόγω των παρελκτικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.
CRC	Πλάτος του συνημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στην ακτίνα της τροχιάς.
CUS	Πλάτος του ημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στο όρισμα του πλάτους της τροχιάς.
CUC	Πλάτος του συνημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στο όρισμα του πλάτους της τροχιάς.
CIS	Πλάτος του ημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στην κλίση της τροχιάς.
CIC	Πλάτος του συνημιτονοειδούς όρου της αρμονικής διόρθωσης στην κλίση της τροχιάς.
DN	Αλλαγή στη μέση κίνηση του δορυφόρου από την μέση κίνηση της κανονικής τροχιάς, εξαιτίας του όρου C_{20} των αρμονικών των ζωνών, της βαρύτητας του Ήλιου και της σελήνης και της πίεσης της ηλιακής ακτινοβολίας.
OMDOT	Γωνιώδης ταχύτητα μετατόπισης του συνδέσμου αναβιβασμού, δηλαδή ρυθμός μεταβολής της ορθής αναφοράς του.
IDOT	Γωνιώδης ταχύτητα μεταβολής της κλίσης της ελλειπτικής τροχιάς.
MO	Μέση ανωμαλία για το χρόνο αναφοράς της εφημερίδας (TOE).
E	Εκκεντρότητα της κεπλέριας έλλειψης.
SQRT-A	Τετραγωνική ρίζα του μεγάλου ημιάξονα της κεπλέριας έλλειψης.
TOE	(Time Of Ephemeris) Χρόνος αναφοράς για τα στοιχεία της τροχιάς που παρέχει η εφημερίδα. Αντίστοιχη ποσότητα με το TOC.
OMO	Ορθή αναφορά (ή αλλιώς μήκος) του συνδέσμου αναβιβασμού.
IO	Κλίση της κεπλέριας τροχιάς στο χρόνο αναφοράς.
OMP	Όρισμα του περιγείου.

2.4.2 Αναλυτική εφαρμογή του αλγόριθμου προσδιορισμού διανύσματος θέσης

Μετά την σύντομη ερμηνεία των στοιχείων του ναυτιλιακού μηνύματος που δόθηκε παραπάνω, θα ασχοληθούμε εδώ με την εφαρμογή του αλγόριθμου, δίνοντας όλο το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτεί ο προσδιορισμός θέσης με το GPS. Για να αποφευχθεί πλατιασμός του κεφαλαίου, στη συνέχεια δίνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών μόνο για ένα δορυφόρο, αυτόν με τον κωδικό αριθμό 6. Στο τρίτο μέρος του αλγορίθμου χρησιμοποιούνται οι τιμές για τους υπόλοιπους, όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, η σύνταξη του οποίου αποτελούσε έναν από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΔΟΡΥΦΟΡΩΝ ΣΤΟ ΓΗΙΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

1.1 Υπολογισμός του χρόνου εκπομπής από τα στοιχεία ZXP.

Η χρονική στιγμή εκπομπής του σήματος υπολογίζεται με αντικατάσταση των τιμών ZXP που φαίνονται στον πίνακα (2.5) στον τύπο:

$$t_{sv}[\text{sec}] = Z \cdot 1.5 + \frac{X+P \cdot 2^{-16}}{10.23 \cdot 10^6}$$

Για τη συχνότητα L1 είναι $t_{1sv} = 389293.935394902714 \text{ sec}$ και για τη συχνότητα L2 είναι $t_{2sv} = 389293.935394896194 \text{ sec}$.

Οι χρόνοι αυτοί είναι ουσιαστικά τα δευτερόλεπτα που πέρασαν από την αρχή της εβδομάδας 284 μέχρι τη στιγμή της εκπομπής.

1.2 Σφάλμα χρονομέτρου του δορυφόρου.

Η διαφορά του χρονομέτρου του δορυφόρου δ από το χρόνο του συστήματος GPS (t), δίνεται από το πιο κάτω πολυώνυμο:

$$\delta_{clk}t = a_0 + a_1(t - t_{oc}) + a_2(t - t_{oc})^2$$

Επειδή ο χρόνος t είναι άγνωστος και είναι αυτό που τελικά θέλουμε να υπολογίσουμε, μπορούμε στην παραπάνω εξίσωση να θέσουμε όπου t τον χρόνο του δορυφόρου t_{sv} . Η προσέγγιση αυτή δεν προκαλεί ελάττωση της ακρίβειας των υπολογισμών καθώς οι δύο χρόνοι διαφέρουν πολύ λίγο και η διαφορά τους πολλαπλασιάζεται με τους συντελεστές a_1 και a_2 που είναι συνήθως μικρότεροι της τάξης του 10^{-10} sec . Προκύπτει ότι:

$$\delta_{clk}t = -0.15974536173 \cdot 10^{-3} \text{ sec και για τις δύο συχνότητες.}$$

1.3 Χρόνος GPS της εκπομπής.

Έχοντας υπολογίσει πριν τη διαφορά των χρόνων δορυφόρου-συστήματος και έχοντας το χρόνο του δορυφόρου, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το χρόνο του συστήματος από τον τύπο:

$$t = t_{sv} - \delta_{clk}t$$

που δίνει $t = 389293.935554648051 \text{ sec}$ για τη συχνότητα L1 και $t = 389293.935554641532 \text{ sec}$ για τη συχνότητα L2.

1.4 Χρονικό διάστημα από τη στιγμή αναφοράς των στοιχείων της εφημερίδας.

Τα στοιχεία των εφημερίδων προσδιορίζουν ποια είναι η θέση του δορυφόρου για μία δεδομένη χρονική στιγμή η οποία χαρακτηρίζεται ως χρόνος της εφημερίδας (t_{oe}). Παρέχουν επίσης τα στοιχεία της τροχιάς, που προβλέφθηκε ότι θα ακο-

λουθήσει ο δορυφόρος μισή ώρα πριν και μισή ώρα μετά τη στιγμή αυτή. Για να υπολογίσουμε τη θέση του κατά τη στιγμή της εκπομπής του σήματος, πρέπει να ξέρουμε πόσος χρόνος (t_k) πέρασε ή υπολείπεται από το χρόνο της εφημερίδας. Αυτό που κάνουμε δηλαδή είναι να μετακινούμε το δορυφόρο από τη γνωστή του θέση τη στιγμή t_{oe} πάνω σε καθορισμένη τροχιά για διάστημα ίσο με t_k . Είναι εμφανές ότι αυτό το διάστημα δίνεται από τον τύπο:

$$t_k = t - t_{oe}$$

από τον οποίο προκύπτει $t_k = - 6706.06444535194896$ sec για την L1 και $t_k = - 6706.06444535846822$ sec για την L2.

1.5 Μεγάλος ημιάξονας της κεπλέριας τροχιάς.

Για λόγους εξοικονόμησης εκπνεόμενων ψηφίων, στο ναυτιλιακό μήνυμα αντί του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς, στέλνεται η τετραγωνική του ρίζα. Για το δορυφόρο 6 έχουμε $A = 26560402.093$ m.

1.6 Μέση κίνηση του δορυφόρου.

Είναι γνωστό ότι ο τρίτος νόμος του Kepler μας οδηγεί στη διατύπωση της σχέσης $n_o^2 = GM / A^3$ για τη μέση κίνηση του δορυφόρου. Για τον δορυφόρο 6 έχουμε $n_o = 0.145853534729 \cdot 10^{-3}$ rad/sec τόσο για την L1 όσο και για την L2.

1.7 Μέση κίνηση διορθωμένη.

Εισάγοντας στη μέση κίνηση του δορυφόρου τη διόρθωση λόγω των φαινομένων που αναφέρθηκαν στην ανάλυση των εφημερίδων έχουμε $n = n_o + \Delta n$, οπότε $n = 0.145854944430 \cdot 10^{-3}$ rad/ sec και για τις δύο συχνότητες.

1.8 Υπολογισμός της μέσης ανωμαλίας.

Για τον υπολογισμό της μέσης ανωμαλίας M_k του δορυφόρου κατά τη στιγμή της εκπομπής, πρέπει να προσθέσουμε στη μέση ανωμαλία M_o κατά τη στιγμή αναφοράς της εφημερίδας την ποσότητα $n \cdot t_k$, εφαρμόζοντας τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο (1.4). Τα αποτελέσματα είναι:

$$M_k = 0.0114563207598 \text{ rad για την L1 και}$$

$$M_k = 0.0114563207589 \text{ rad για την L2.}$$

1.9 Υπολογισμός της έκκεντρης ανωμαλίας.

Όπως είναι γνωστό η έκκεντρη ανωμαλία E_k συνδέεται με την μέση ανωμαλία M_k με την εξίσωση:

$$E_k = M_k + e \cdot \sin E_k$$

γνωστή ως **εξίσωση του Kepler**. Το e είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς του δορυφόρου και παρέχεται από την εφημερίδα του. Από τη μορφή της εξίσωσης είναι

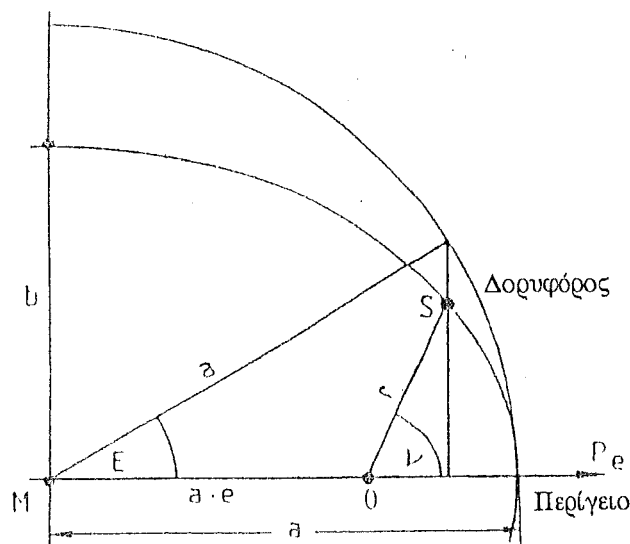
σαφές ότι για την επίλυσή της απαιτείται η χρήση της επαναληπτικής μεθόδου. Αρχική τιμή για την έκκεντρη ανωμαλία θέτουμε $E_k = M_k$. Για το δορυφόρο 6 είναι:

$$E_k = 0.011500183269 \text{ rad για την L1 και}$$

$$E_k = 0.011500183268 \text{ rad για την L2.}$$

1.10 Υπολογισμός της αληθούς ανωμαλίας.

Η έκκεντρη ανωμαλία E_k που υπολογίστηκε παραπάνω είναι η γωνία με κορυφή το κέντρο της ελλειπτικής τροχιάς και πλευρές προς το περίγειο και προς την προβολή της θέσης του δορυφόρου πάνω σ' ένα κύκλο ομοεπίπεδο και ομόκεντρο με την έλλειψη με ακτίνα ίση με το μεγάλο ημιάξονά της. Η αληθής ανωμαλία v_k είναι η γεωκεντρική γωνία μεταξύ του περιγείου και της θέσης που βρίσκεται ο δορυφόρος. Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα (2.4).



Σχήμα 2.4 Αληθής ανωμαλία v και έκκεντρη ανωμαλία E .

Η αληθής ανωμαλία υπολογίζεται εναλλακτικά με έναν από τους τρεις επόμενους τύπους:

$$v_k = \arccos \frac{\cos E_k - e}{1 - e \cos E_k}$$

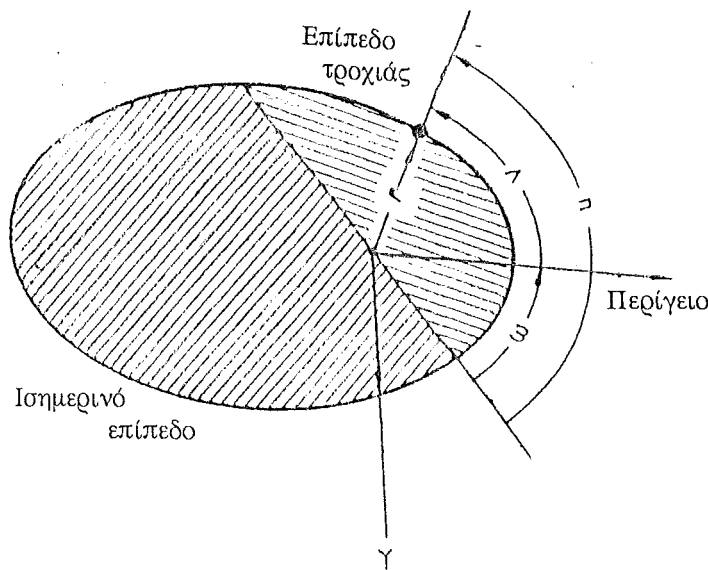
$$v_k = \arcsin \frac{\sin E_k \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E_k}$$

$$v_k = \arctan \frac{\sin E_k \sqrt{1 - e^2}}{\cos E_k - e}$$

Για το δορυφόρο 6 προκύπτει: $\nu_k = 0.01154412974$ rad για την L1
και $\nu_k = 0.011544129741$ rad για την L2.

1.11 Όρισμα του πλάτους.

Το άθροισμα του ορίσματος του περιγείου ω και της αληθούς ανωμαλίας, που είναι δύο ομοεπίπεδες γωνίες με κοινή κορυφή το γεώκεντρο και μία κοινή πλευρά, δίνει το όρισμα του πλάτους φ_k όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.5). Για το δορυφόρο 6 προκύπτει: $\varphi_k = 2.063158067880$ rad για την L1
και $\varphi_k = 2.063158067879$ rad για την L2.



Σχήμα 2.5 Όρισμα του περιγείου ω , αληθής ανωμαλία ν και όρισμα του πλάτους μ .

1.12 Αρμονικές διορθώσεις στην τροχιά.

Η πραγματική διαταραγμένη τροχιά που διαγράφει ο δορυφόρος προσεγγίζεται διορθώνοντας το όρισμα του πλάτους, την ακτίνα της τροχιάς και την κλίση της με τις ποσότητες που δίνουν οι παρακάτω τύποι:

$$\delta u_k = C_{uc} \cos 2\varphi_k + C_{us} \sin 2\varphi_k$$

$$\delta r_k = C_{rc} \cos 2\varphi_k + C_{rs} \sin 2\varphi_k$$

$$\delta i_k = C_{ic} \cos 2\varphi_k + C_{is} \sin 2\varphi_k$$

Για τον δορυφόρο 6 έχουμε: $\delta u_k = -0.9104825004 \cdot 10^{-6}$ rad, $\delta r_k = -208.0236$ m,
 $\delta i_k = 0.11116952 \cdot 10^{-6}$ rad τόσο για την L1, όσο και για την L2.

1.13 Διόρθωση του ορίσματος του πλάτους, της ακτίνας και της κλίσης της τροχιάς.

Έχοντας υπολογίσει τις αρμονικές διορθώσεις μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το όρισμα του πλάτους, την ακτίνα και την κλίση της τροχιάς του δορυφόρου κατά τη στιγμή της εκπομπής του σήματος. Οι αντίστοιχοι τύποι είναι:

$$u_k = \varphi_k + \delta u_k$$

$$r_k = A (1 - e \cos E_k) + \delta r_k$$

$$i_k = i_0 + \dot{i} t_k + \delta i_k$$

Το μέγεθος \dot{i} είναι η παράγωγος της κλίσης ως προς το χρόνο για τη στιγμή αναφοράς της εφημερίδας και συμβολίζεται στο ναυτιλιακό μήνυμα σαν IDOT. Οι τιμές που προκύπτουν για το δορυφόρο 6 είναι: $u_k = 2.063157157398 \text{ rad}$
 $r_k = 26458895.290 \text{ m}$ και $i_k = 1.117849805649 \text{ rad}$ για την L1 και την L2.

1.14 Συντεταγμένες στο τροχιακό επίπεδο.

Με την ακτίνα της τροχιάς και το όρισμα του πλάτους υπολογίζονται οι επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες σε ένα σύστημα αναφοράς ομοεπίπεδο της τροχιάς με αρχή των αξόνων στο γεώκεντρο και άξονα Oξ προς το σύνδεσμο αναβιβασμού. Οι τύποι είναι:

$$\xi_k = r_k \cos u_k$$

$$\eta_k = r_k \sin u_k$$

και δίνουν $\xi_k = -12507321.239 \text{ m}$ και $\eta_k = 23316090.054 \text{ m}$ και για τις δύο συχνότητες.

1.15 Διόρθωση του μήκους του συνδέσμου αναβιβασμού.

Το μήκος ή αλλιώς ορθή αναφορά του συνδέσμου αναβιβασμού είναι η γεωκεντρική γωνία πάνω στο ισημερινό επίπεδο μεταξύ του εαρινού ισημερινού σημείου και του συνδέσμου αναβιβασμού. Για το χρόνο αναφοράς της εφημερίδας συμβολίζεται με Ω_0 . Για τον υπολογισμό της ορθής αναφοράς τη στιγμή της εκπο-

μπής Ω_k πρέπει να ληφθεί υπόψη η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\Omega}$ της μετατόπισης του συνδέσμου. Για τη μετάβαση από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων του δορυφόρου στο γήινο σύστημα αναφοράς χρειάζεται η ταχύτητα περιστροφής της Γης $\dot{\Omega}_e$. Ο τύπος για τη διόρθωση είναι:

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{0e}$$

Για το δορυφόρο 6 δίνει $\Omega_k = -26.304113446740 \text{ rad}$ και για τις δύο συχνότητες.

1.16 Υπολογισμός των γήινων συντεταγμένων του δορυφόρου.

Μέχρι εδώ έχουμε τις συντεταγμένες του δορυφόρου στο επίπεδο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς της τροχιάς του (Γεώκεντρο, ξ, η). Για να μεταβούμε από αυτό στο γήινο σύστημα, πρέπει να στρέψουμε το επίπεδο σύστημα γύρω από τον άξονα $\xi \xi'$ κατά γωνία ίση με i_k ώστε ο άξονας $\eta \eta'$ να συμπίσει με τον άξονα $Z Z'$ του γήινου συστήματος. Στρέφοντας επίσης το επίπεδο σύστημα γύρω από τον άξονα $\eta \eta'$ κατά γωνία ίση με Ω_k φέρνουμε τον άξονα $\xi \xi'$ σε σύμπτωση με τον $X X'$ του γήινου συστήματος. Αυτά γίνονται με τις σχέσεις:

$$X_k = \xi_k \cos \Omega_k - \eta_k \sin \Omega_k \cos i_k$$

$$Y_k = \xi_k \sin \Omega_k + \eta_k \cos \Omega_k \cos i_k$$

$$Z_k = \eta_k \sin i_k$$

που δίνουν $X_k = 4536399.661$ m, $Y_k = 15490831.096$ m και $Z_k = 20964931.911$ m και για τις δύο συχνότητες.

2. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

2.1 Διόρθωση των γήινων συντεταγμένων του δορυφόρου λόγω περιστροφής της Γης.

Οι συντεταγμένες που υπολογίστηκαν παραπάνω είναι οι γήινες συντεταγμένες του δορυφόρου τη στιγμή της εκπομπής του σήματος. Η απόσταση όμως που διανύει το σήμα μέχρι τη λήψη του δεν είναι ίση με το μήκος του διανύσματος που έχει αρχή το δέκτη και τέλος τη θέση του δορυφόρου τη στιγμή της εκπομπής. Αντίθετα η πραγματική διανυόμενη απόσταση από το σήμα ισούται με το μήκος του διανύσματος που έχει αρχή το δέκτη και τέλος τη θέση του δορυφόρου τη στιγμή της λήψης. Αυτό συμβαίνει γιατί η Γη περιστράφηκε κατά τη διάρκεια της μετάδοσης του σήματος και η σχετική θέση δορυφόρου-δέκτη άλλαξε. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τη θέση του δορυφόρου τη στιγμή της λήψης του σήματος. Αυτό γίνεται στρίβοντας τις προηγούμενες συντεταγμένες κατά γωνία $\delta\Omega_e$, δηλαδή τη γωνία που περιστράφηκε η Γη όσο διαδιδόταν το σήμα. Αυτή προκύπτει από τη σχέση:

$$\delta\Omega_e = \dot{\Omega}_e \cdot \tau$$

ως γινόμενο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Γης $\dot{\Omega}_e$ και του χρόνου διάδοσης του σήματος τ . Αυτός υπολογίζεται ως πηλίκο της απόστασης δορυφόρου-δέκτη προς την ταχύτητα του φωτός. Οι σχέσεις στροφής των συντεταγμένων είναι:

$$X_{sv} = X_k \cos \delta\Omega_e + Y_k \sin \delta\Omega_e$$

$$Y_{sv} = Y_k \cos \delta\Omega_e - X_k \sin \delta\Omega_e$$

$$Z_{sv} = Z_k$$

και δίνουν $X_{sv} = 4536481.733$ m, $Y_{sv} = 15490807.061$ m και $Z_{sv} = 20964931.911$ m και για τις δύο συχνότητες.

2.2 Διόρθωση λόγω σχετικιστικών φαινομένων.

Εξαιτίας κάποιων φαινομένων που προβλέπονται από τη θεωρία της σχετικότητας (ανομοιόμορφη ροή χρόνου για παρατηρητές με διαφορετικές ταχύτητες, όταν αυτές είναι μεγάλες) πρέπει στο σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου, όπως αυτό υπολογίστηκε στην παράγραφο (1.2), να προστεθεί η ποσότητα $\delta_{rel}t$ για να προκύψει το διορθωμένο σφάλμα του χρονομέτρου. Η ποσότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$\delta_{rel}t = -4.443 \cdot 10^{-10} [\text{sec}/\text{m}^{1/2}] e A^{1/2} \sin E_k$$

Το αποτέλεσμα είναι $\delta_{rel}t = 0.10043 \cdot 10^{-9}$. Το διορθωμένο σφάλμα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta t_{sv} = \delta_{clk}t + \delta_{rel}t$$

που δίνει για το δορυφόρο 6: $\delta t_{sv} = -0.15974546217 \cdot 10^{-3}$ sec και για τις δύο συχνότητες.

2.3 Διόρθωση λόγω ιονοσφαιρικής διάθλασης.

Η ιονοσφαιρική διάθλαση είναι συνάρτηση της συχνότητας του σήματος και γι' αυτό η τιμή της για τις δύο συχνότητες είναι αρκετά διαφορετική. Χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\delta_{iono}r_1 = c \frac{t_{2sv} - t_{1sv}}{1 - (f_1/f_2)^2}$$

$$\delta_{iono}r_2 = c \frac{t_{1sv} - t_{2sv}}{1 - (f_2/f_1)^2}$$

προκύπτει ότι $\delta_{iono}r_1 = 3.021$ m και $\delta_{iono}r_2 = 4.975$ m.

2.4 Διόρθωση λόγω τροποσφαιρικής διάθλασης.

Η διάδοση του σήματος μέσα από την τροπόσφαιρα, προκαλεί σ' αυτό μία καθυστέρηση κυρίως λόγω της διάθλασης που υφίσταται. Η τροποσφαιρική διάθλαση είναι γνωστό ότι εξαρτάται από τη γωνία ύψους πάνω από τον ορίζοντα του τόπου, με την οποία το σήμα διανύει την τροπόσφαιρα για να φτάσει στον τόπο αυτό. Η διάθλαση εξαρτάται επίσης από την πίεση, την θερμοκρασία και την υγρασία της τροπόσφαιρας. Για μετρήσεις ακριβείας τα δύο πρώτα μεγέθη είναι καλό να με-

τριούνται στην περιοχή του δέκτη κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων. Η γωνία ύψους υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{(X_{sv} - X_{us}) X_{us} + (Y_{sv} - Y_{us}) Y_{us} + (Z_{sv} - Z_{us}) Z_{us}}{\sqrt{(X_{sv} - X_{us})^2 + (Y_{sv} - Y_{us})^2 + (Z_{sv} - Z_{us})^2} \sqrt{X_{us}^2 + Y_{us}^2 + Z_{us}^2}}\right)$$

Για το δορυφόρο 6 προκύπτει μετά από μετατροπή των ακτινίων σε μοίρες:

$E = 41.8875487509$ rad. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον τύπο:

$$\delta_{trop} = K_D P \frac{1}{\sin(E^2 + 2.95^2)^{1/2}} + K_w \frac{1}{\sin(E^2 + 1.05^2)^{1/2}}$$

προκύπτει ότι $\delta_{trop} = 3.631$ m και για τις δύο συχνότητες.

3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Για το σχηματισμό του συστήματος των εξισώσεων, τα αποτελέσματα των παραγράφων 1 και 2 για τους δορυφόρους 8, 11, 12 προέρχονται από το πρόγραμμα για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

3.1 Διάνυσμα των παρατηρήσεων.

Η παρατηρούμενη ψευδοαπόσταση δίνεται από τον τύπο:

$$pr = c (t_{us} - t_{sv}) - \delta_{iono} - \delta_{trop}$$

Το διάνυσμα των παρατηρήσεων είναι:

$$L = [19368114.263 \quad 20689892.394 \quad 20948129.935 \quad 20524573.215]^T$$

3.2 Διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων.

Επειδή το σύστημα των εξισώσεων έχει γραμμικοποιηθεί, για την επίλυσή του χρειάζεται η εισαγωγή προσεγγιστικών συντεταγμένων για το δέκτη. Αυτές είναι: $\varphi = 52^\circ 23' 7.5''$, $\lambda = 9^\circ 42' 44.4''$, $h = 123$ m. Αυτές οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες πρέπει να μετατραπούν σε συντεταγμένες στο γήινο σύστημα αναφοράς στο οποίο έχουν υπολογιστεί και αυτές των δορυφόρων. Οι τύποι μετασχηματισμού είναι (Λιβιεράτος, Φωτίου, 1986):

$$X_{us} = (N + h) \cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y_{us} = (N + h) \cos\varphi \sin\lambda$$

$$Z_{us} = ((1 - e^2)N + h) \sin\varphi$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

όπου a και e ο μεγάλος ημιάξονας και η εκκεντρότητα αντίστοιχα του ΕΕΠ του WGS 84 και N η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης κάθετης τομής στο ΕΕΠ. Το διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων είναι:

$$\mathbf{X}^0 = [3845238.077 \quad 658130.489 \quad 5029189.985 \quad 0.000]^T$$

Το τελευταίο στοιχείο είναι η προσεγγιστική τιμή του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη και στην πρώτη λύση τίθεται ίση με 0.

3.3 Διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των παρατηρήσεων.

Η προσεγγιστική ψευδοαπόσταση δίνεται από την εξίσωση:

$$pr = |\mathbf{R}_{us} - \mathbf{R}_{sv}| + c(\delta t_{us} - \delta t_{sv})$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{L}^0 = [21829396.007 \quad 23151174.792 \quad 23409409.867 \quad 22985836.368]^T$$

Αυτό που έχει σημασία να προσεχθεί εδώ είναι η πολύ μεγάλη διαφορά μεταξύ προσεγγιστικών και παρατηρούμενων ψευδοαποστάσεων που οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στην αγνόηση του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη (η προσεγγιστική του τιμή τέθηκε ίση με 0). Το σφάλμα αυτό, που εδώ δημιουργεί μιά διαφορά στις ψευδοαποστάσεις της τάξης των δύο ως τριών χιλιάδων χιλιομέτρων, προκύπτει τελικά από τους υπολογισμούς ότι είναι της τάξης του χιλιοστού του δευτερολέπτου. Ενδεικτικά δίνεται το διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών μετά την πρώτη επανάληψη της λύσης, όπου οι προηγούμενες διαφορές έχουν γίνει της τάξης των μερικών μέτρων:

$$\mathbf{L}^0 = [19368125.503 \quad 206899904.289 \quad 20948139.364 \quad 20524565.864]^T$$

3.4 Διάνυσμα των ανηγμένων παρατηρήσεων.

Το διάνυσμα αυτό είναι η διαφορά των παρατηρούμενων από τις προσεγγιστικές ψευδοαποστάσεις και είναι αυτό που δείχνει ξεκάθαρα την επίδραση του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη, όπως εξηγήθηκε μόλις πριν. Δίνεται και πάλι για την πρώτη λύση και την πρώτη επανάληψη:

$$\mathbf{I} = [-2461281.744 \quad -2461282.398 \quad -2461279.933 \quad -2461263.153]^T$$

$$\mathbf{I} = [-11.240 \quad -11.895 \quad -9.429 \quad -7.351]^T$$

3.5 Πίνακας σχεδιασμού.

Ο πίνακας σχεδιασμού περιέχει τις μερικές παραγώγους των τεσσάρων ψευδο-ποστάσεων, όπως δίνονται στην εξίσωση παρατήρησης, ως προς τα X_{us} , Y_{us} , Z_{us} και dt_{us} . Αυτές είναι:

$$\frac{\partial r_i}{\partial X_{us}} = \frac{(X_{us} - X_{sv})}{b} \qquad \frac{\partial r_i}{\partial Y_{us}} = \frac{(Y_{us} - Y_{sv})}{b}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial Z_{us}} = \frac{(Z_{us} - Z_{sv})}{b} \qquad \frac{\partial r_i}{\partial dt_{us}} = c$$

$$\text{όπου } b = \sqrt{(X_{us} - X_{sv})^2 + (Y_{us} - Y_{sv})^2 + (Z_{us} - Z_{sv})^2}$$

Οι τιμές του πίνακα είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0317353 & -0.6809757 & -0.7316180 & 299792458.0 \\ 0.3665109 & -0.5414664 & -0.7566266 & 299792458.0 \\ -0.2326553 & -0.9380622 & -0.2567163 & 299792458.0 \\ -0.4745831 & 0.8151833 & -0.3320348 & 299792458.0 \end{bmatrix}$$

3.6 Λύση του συστήματος.

Η λύση του συστήματος των γραμμικοποιημένων εξισώσεων παρατήρησης με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων δίνει για το διάνυσμα των διαφορών των αγνώστων παραμέτρων από τις προσεγγιστικές τους τιμές:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{II}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{II}^{-1} \mathbf{l}$$

όπου \mathbf{Q}_{II}^{-1} ο πίνακας ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων. Καθώς αυτές θεωρούνται ισοβαρείς και η μεταβλητότητα της μονάδας βάρους είναι άγνωστη, ο πίνακας \mathbf{Q}_{II} εκφυλίζεται στο μοναδιαίο πίνακα 4x4. Οι τιμές του διανύσματος \mathbf{x} είναι:

$$\mathbf{x} = [-4.449 \quad 9.255 \quad 6.942 \quad -0.00820991468]^T.$$

3.7 Πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων.

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων είναι:

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{II}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$$

Έχοντας θέσει μοναδιαίο πίνακα βάρους και μεταβλητότητα της μονάδας βάρους ίση με 1, προκύπτουν οι παρακάτω τιμές:

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 12.641 & 2.014 & 12.405 & 0.276714 \cdot 10^{-7} \\ 2.014 & 0.912 & -1.460 & 0.417757 \cdot 10^{-8} \\ 12.405 & 1.460 & 17.493 & 0.357892 \cdot 10^{-7} \\ 0.276714 \cdot 10^{-7} & 0.417757 \cdot 10^{-8} & 0.35789 \cdot 10^{-7} & 0.780 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Έχουμε δηλαδή για τα $X_{us}-X_{us}^0$, $Y_{us}-Y_{us}^0$, $Z_{us}-Z_{us}^0$, και $dt_{us}-dt_{us}^0$ τυπικές αποκλίσεις: ± 3.555 m, ± 0.955 m, ± 4.182 m, $\pm 8.8317 \cdot 10^{-9}$ sec.

Αυτός ο πίνακας περιλαμβάνει τα στοιχεία DOP, δηλαδή δίνει τις μεταβλητότητες-συμμεταβλητότητες των αγνώστων που οφείλονται μόνο στην επίδραση της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων. Όπως εξηγήθηκε στο υποκεφάλαιο 2.2 η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται όχι μόνο από τα DOP, αλλά και από το μέγεθος UERE. Η καλύτερη προσέγγιση του UERE που μπορεί να έχει ο χρήστης, είναι το μέγεθος URA που δίνεται για κάθε δορυφόρο από το ναυτιλιακό του μήνυμα (βλ. υποκεφάλαιο 2.3 με την ανάλυση των στοιχείων του ναυτιλιακού μηνύματος).

Αν στην επίλυση του συστήματος θέσουμε πίνακα βάρους των παρατηρήσεων ένα διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τα αντίστοιχα των τετραγώνων των τεσσάρων ποσοτήτων URA των εφημερίδων, τότε ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων γίνεται:

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 113.598 & 18.053 & 108.576 & 0.241369 \cdot 10^{-6} \\ 18.052 & 9.367 & -18.438 & 0.531538 \cdot 10^{-7} \\ 108.576 & 18.438 & 138.129 & 0.286694 \cdot 10^{-6} \\ 0.241369 \cdot 10^{-6} & 0.53154 \cdot 10^{-7} & 0.286694 \cdot 10^{-6} & 0.650568 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

Έχουμε δηλαδή για τα $X_{us}-X_{us}^0$, $Y_{us}-Y_{us}^0$, $Z_{us}-Z_{us}^0$ και $dt_{us}-dt_{us}^0$ τυπικές αποκλίσεις: ± 10.658 m, ± 3.061 m, ± 11.753 m, $\pm 2.55062 \cdot 10^{-8}$ sec.

3.8 Διάνυσμα των αγνώστων.

Το διάνυσμα \mathbf{X} των αγνώστων, δηλαδή αυτό με τις γεωκεντρικές συντεταγμένες του δέκτη και το σφάλμα του χρονομέτρου του, υπολογίζεται από την πρόσθεση των διανυσμάτων \mathbf{x} και \mathbf{X}^0 :

$$\mathbf{X} = [3845233.629 \quad 658139.745 \quad 5029196.927 \quad 0.0082099146859]^T$$

3.9 Υπολογισμός των ελλειψοειδών συντεταγμένων του δέκτη.

Για τον μετασχηματισμό των γεωκεντρικών καρτεσιανών συντεταγμένων σε ελλειψοειδείς, χρησιμοποιούμε τους τύπους (Λιβιεράτος, Φωτίου, 1986):

$$\lambda = \arctan \frac{Y_{us}}{X_{us}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z_{us} + e^2 N \sin\varphi}{\sqrt{X_{us}^2 + Y_{us}^2}}$$

$$h = \frac{X_{us}}{\cos\varphi \cos\lambda} - N = \frac{Y_{us}}{\cos\varphi \sin\lambda} - N$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

όπου a και e ο μεγάλος ημιάξονας και η εκκεντρότητα αντίστοιχα του ΕΕΠ του WGS 84 και N η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης κάθετης τομής στο ΕΕΠ. Έτσι οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες του δέκτη προκύπτουν:

$$[\varphi \ \lambda \ h] = [52^\circ 23' 7.7092'' \quad 9^\circ 42' 44.9208'' \quad 126.775]$$

3.10 Πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των ελλειψοειδών συντεταγμένων.

Έχοντας τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων Q_{xx} των γεωκεντρικών καρτεσιανών συντεταγμένων, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστοιχο πίνακα $Q_{\varphi\varphi}$ για τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες. Αυτοί οι δύο συνδέονται μέσω του πίνακα F , ο οποίος περιέχει τις παραγώγους του διανύσματος $[\varphi \ \lambda \ h]^T$, ως προς το διάνυσμα $[X \ Y \ Z]^T$. Ο πίνακας F είναι (Λιβιεράτος, Φωτίου, 1986):

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-n^2)(A-kD)} & \frac{m}{(1-n^2)(A-kD)} & \frac{-1}{n(A-kD)} \\ \frac{-m}{(1-n^2)B} & \frac{1}{(1-n^2)B} & 0 \\ \frac{-kID}{(1-n^2)(A-kD)} & \frac{-kmD}{(1-n^2)(A-kD)} & \frac{A}{n(A-kD)} \end{bmatrix}$$

όπου :

$$l = \cos\varphi \cos\lambda$$

$$m = \cos\varphi \sin\lambda$$

$$n = \sin\varphi$$

$$k = 1 - e^2$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

$$L = a W^3 e^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$B = a W + h$$

$$A = L - B \tan\varphi$$

$$D = L + \frac{B - aWe^2}{k} \cot\varphi$$

Η σχέση είναι:

$$\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T$$

και δίνει:

$$\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} 0.639 \cdot 10^{-13} & -0.144 \cdot 10^{-13} & -0.156 \cdot 10^{-6} & -0.501 \cdot 10^{-6} \\ -0.144 \cdot 10^{-13} & 0.378 \cdot 10^{-13} & -0.141 \cdot 10^{-6} & -0.141 \cdot 10^{-15} \\ -0.156 \cdot 10^{-6} & -0.141 \cdot 10^{-6} & 27.872 & 0.454 \cdot 10^{-7} \\ -0.156 \cdot 10^{-6} & -0.141 \cdot 10^{-15} & 0.454 \cdot 10^{-7} & 0.780 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathbf{Q}_{\varphi\varphi}$ παρέχει τις μεταβλητότητες και συμμεταβλητότητες των ελλειψοειδών συντεταγμένων (εκτός από το υψόμετρο) ως γωνιακά μεγέθη (rad^2). Για να γίνει αντιληπτό αν οι τιμές αυτές είναι μικρές ή μεγάλες, πρέπει να δώσουμε τις τιμές των αποκλίσεων των ελλειψοειδών συντεταγμένων εκφρασμένες σε μέτρα. Αυτό πετυχαίνεται με τις σχέσεις:

$$\sigma_{\varphi} [\text{m}] = \rho \sigma_{\varphi} [\text{rad}]$$

$$\sigma_{\lambda} [\text{m}] = r \sigma_{\lambda} [\text{rad}]$$

όπου ρ η ακτίνα καμπυλότητας της μεσημβρινής τομής και r η ακτίνα του παράλληλου κύκλου.

Τα τελικά αποτελέσματα είναι: $\sigma_{\varphi} = \pm 1.612 \text{ m}$, $\sigma_{\lambda} = \pm 0.758 \text{ m}$, $\sigma_h = \pm 5.279 \text{ m}$ και $\sigma_{dt} = \pm 8.838 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι το υψόμετρο προσδιορίζεται με αρκετά μεγαλύτερη ασάφεια, σε σχέση με τις άλλες δύο συντεταγμένες, πράγμα που είναι χαρακτηριστικό για τον απόλυτο στατικό προσδιορισμό με GPS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φίλτρο Kalman είναι μια εφαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων σε προβλήματα εκτίμησης δυναμικών μεγεθών, για το οποία λαμβάνονται μετρήσεις ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Πιο συγκεκριμένα είναι μία μορφή διαδοχικής συνόρθωσης (συνόρθωση κατά βήματα), η οποία όμως εμφανίζει κάποιες ιδιαιτερότητες σε σύγκριση με τις συνηθισμένες εφαρμογές της μεθόδου της διαδοχικής συνόρθωσης σε γεωδαιτικές και τοπογραφικές μελέτες.

Αυτό που έχει μεγάλη σημασία είναι ότι στα δυναμικά μεγέθη η εκτίμηση της προηγούμενης στιγμής δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν προεκτίμηση των μεγεθών για την επόμενη στιγμή, αφού αυτά τα μεγέθη είναι εξ ορισμού τους διαφορετικά μεταξύ τους. Στο σημείο αυτό ακριβώς έγκειται η ιδιαιτερότητα του φίλτρου Kalman ως μεθόδου διαδοχικής συνόρθωσης. Για την εφαρμογή του απαιτείται η γνώση κάποιων σχέσεων, οι οποίες συνδέουν τους αγνώστους δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών.

Ας θεωρήσουμε ότι για κάποιο δυναμικό μέγεθος x_i λαμβάνονται παρατηρήσεις σε διαφορετικές χρονικές στιγμές t_i :

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{b}_{i-1} &= \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1} \\
\mathbf{b}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3\alpha}$$

όπου οι παράμετροι \mathbf{x}_i της εποχής t_i συνδέονται με τις παραμέτρους \mathbf{x}_{i-1} της προηγούμενης εποχής t_{i-1} με τη σχέση:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{T}_{i,i-1} \mathbf{x}_{i-1} \tag{3\beta}$$

Ο πίνακας \mathbf{T} ονομάζεται **πίνακας μετάβασης**.

Για το σχηματισμό των παραπάνω εξισώσεων απαιτείται η σε βάθος γνώση της δυναμικής του εξεταζομένου συστήματος. Οι σχέσεις αυτές μας μεταβιβάζουν από τη στιγμή $i-1$ στη στιγμή i , παρέχοντας έτσι μια προεκτίμηση για τα άγνωστα μεγέθη της στιγμής i . Αυτή η προεκτίμηση μπορεί να γίνει πριν να ληφθούν οι μετρήσεις που αφορούν τη στιγμή αυτή (αφού απαιτείται μόνο η εκτίμηση της προηγούμενης στιγμής) και για το λόγο αυτό στη θεωρία του φίλτρου Kalman ονομάζεται **πρόβλεψη**.

Το φίλτρο Kalman είναι μία μορφή διαχωρισμένου αλγόριθμου της ταυτόχρονης συνόρθωσης των εξισώσεων παρατηρήσεων της σχέσης (3α) κατά εποχή. Η εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}_i$ των παραμέτρων της εποχής t_i , παίρνοντας υπόψη όλες τις παρατηρήσεις μέχρι και την εποχή t_i , δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}' + \mathbf{Q}_x' \mathbf{A}_i^T (\mathbf{A}_i \mathbf{Q}_x' \mathbf{A}_i^T + \mathbf{Q}_i)^{-1} (\mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{x}') \tag{3\gamma}$$

όπου \mathbf{Q}_i είναι ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων της t_i εποχής και:

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \tag{3\delta}$$

$$\mathbf{Q}_x' = \mathbf{T} \mathbf{Q}_x^{\wedge}(t-1) \mathbf{T}^T$$

είναι η πρόβλεψη των παραμέτρων αυτών από τις παρατηρήσεις μέχρι και την t_{i-1} εποχή και ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων τους αντίστοιχα. Στις σχέσεις (3δ) με $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ συμβολίζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της $i-1$ εποχής, που προέκυψαν από την ανάλυση των παρατηρήσεων μέχρι και την $i-1$ εποχή, και με $\mathbf{Q}_x^{\wedge}(t-1)$ ο πίνακας των συμμεταβλητοτήτων τους.

Η σχέση (3γ) γράφεται:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}' + \mathbf{K} (\mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{x}') \tag{3\epsilon}$$

όπου ο πίνακας:

$$K = Q_x' A_i^T (A_i Q_x' A_i^T + Q_i)^{-1}$$

ονομάζεται πίνακας κέρδους. Ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων των \hat{x}_i είναι:

$$Q_{\hat{x}}(t) = (I - KA) Q_x' \quad (3στ)$$

Από τη σχέση (3ε) φαίνεται ότι η εκτίμηση των επιθυμητών τιμών ισούται με την πρόβλεψη που γίνεται ακριβώς πριν τη μέτρηση συν τη διαφορά μέτρησης- πρόβλεψης που εισάγεται με κάποιο βάρος.

Σα γενικό συμπέρασμα λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι στο φίλτρο Kalman είναι μία μορφή του διαχωρισμένου αλγόριθμου της ενιαίας συνόρθωσης, όπου σε κάθε εποχή αξιοποιούνται οι παρατηρήσεις των προηγούμενων εποχών μέσα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων συνορθώσεων και τη διαδικασία της πρόβλεψης με βάση τη σχέση (3β). Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιούμε τη συνόρθωση σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, έτσι ώστε η όλη διαδικασία να μπορεί να συντελεσθεί κατά τη διάρκεια των μετρήσεων (σε “πραγματικό χρόνο”).

Μέχρι σήμερα η μέθοδος του φίλτρου Kalman έχει βρει αρκετές εφαρμογές. Οι πιο συνηθισμένες αφορούν τη ναυσιπλοΐα, την πλοήγηση αεροσκαφών και διαστημικών οχημάτων, τα αδρανειακά συστήματα και γενικά τον προσδιορισμό θέσης οχημάτων που εκτελούν επιστημονικές εργασίες. Τέλος η μέθοδος παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου της αξιοπιστίας των λαμβανομένων μετρήσεων. Η λογική στην οποία στηρίζεται ο έλεγχος αυτός, είναι ότι αν σε κάποια χρονική στιγμή ληφθεί μέτρηση που απέχει σημαντικά από την πρόβλεψη για την ίδια στιγμή, τότε αυτή η μέτρηση θεωρείται ύποπτη για χονδροειδές σφάλμα. Ακριβώς με αυτό το σκεπτικό η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και για εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων κατά τη διαδικασία ψηφιοποίησης.

3.1.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για να γίνουν τα προηγούμενα πιο κατανοητά ας δούμε μία εφαρμογή του φίλτρου Kalman στη ναυσιπλοΐα. Ας θεωρήσουμε ένα πλοίο του οποίου η θέση καθορίζεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα Δt . Από την προηγούμενη θέση, η επόμενη θέση μπορεί να προβλεφθεί χωρίς μέτρηση. Θεωρώντας ότι το πλοίο έχει κατά προσέγγιση σταθερή ταχύτητα, δηλ. η επιτάχυνση του είναι μηδέν, τότε η προβλεπόμενη διανυόμενη απόσταση s' είναι:

$$s' = s(t-1) + v(t-1)\Delta t \quad (3-1α)$$

Η προβλεπόμενη ταχύτητα v' (t) είναι φυσικά v' (t-1). Δηλαδή:

$$v' (t) = 0 s(t-1) + v(t-1) 1 \quad (3-1β)$$

Για να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις σε μορφή πινάκων εισάγουμε το **διάνυσμα κατάσταση** της πρόβλεψης $x'(t)$, το οποίο περιλαμβάνει την προβλεπόμενη απόσταση και την προβλεπόμενη ταχύτητα, δηλαδή:

$$x'(t) = [s' \quad v']^T$$

Έτσι γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} s'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t-1) \\ v(t-1) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

ή ισοδύναμα:

$$x'(t) = T x(t-1)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **σχέση μετάβασης** γιατί μας επιτρέπει, αν γνωρίζουμε την κατάσταση του πλοίου τη στιγμή $t-1$, να "μεταβούμε" στην κατάσταση της στιγμής t χωρίς να έχουμε μετρήσεις (dead reckoning). Ο πίνακας T ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** (transition matrix).

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί εδώ, είναι ότι στη σχέση (3-2) το διάνυσμα κατάστασης για τη χρονική στιγμή $t-1$ δεν είναι τονούμενο. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι πρόβλεψη για τη στιγμή αυτή. Είναι το διάνυσμα που εκφράζει την πραγματική θέση $s(t-1)$ και την πραγματική ταχύτητα για $t-1$. Αφήνουμε λοιπόν ένα ανοικτό θέμα στο σημείο αυτό, για το πως θα γνωρίζουμε αυτό το διάνυσμα.

Για να υπολογίσουμε όμως την ακρίβεια του διανύσματος κατάστασης τη στιγμή t , πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και κάποια μικρή επιτάχυνση που έχει το πλοίο. Αυτό δεν αντιβαίνει στην υπόθεση που κάναμε στην αρχή για την κίνηση του πλοίου με σταθερή ταχύτητα. Η ευθύγραμμη ισοταχής κίνηση στην πράξη σημαίνει ότι η μέση επιτάχυνση είναι μηδέν. Όμως είναι ευνόητο ότι λόγω φυσικών αιτιών (κύματα, άνεμος) το πλοίο δεν έχει απόλυτα σταθερή ταχύτητα και αυτό σημαίνει την ύπαρξη κάποιας επιτάχυνσης a , η οποία λειτουργεί ως θόρυβος στο μαθηματικό μοντέλο της σχέσης (3-2).

Είναι γνωστό ότι στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η απόσταση s και η ταχύτητα v δίνονται από τις σχέσεις :

$$s = s_0 + v t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (3-3\alpha)$$

$$v = v_0 + at \quad (3-3\beta)$$

Έτσι οι αρχικές σχέσεις (3-1) γίνονται:

$$s' = s(t-1) + v(t-1)\Delta t + \frac{1}{2} a_a t^2 \quad (3-4\alpha)$$

$$v'(t) = v(t-1) + a_a \Delta t \quad (3-4\beta)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} s'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t-1) \\ v(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} a_a \quad (3-5)$$

Θα μπορούσε εδώ να σκεφτεί κανείς ότι το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κατάσταση του πλοίου (θέση και ταχύτητα) έγινε πια ίδιο με αυτό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Αυτό δεν είναι αλήθεια γιατί στην περίπτωση αυτή στις εξισώσεις (3-4) θα έπρεπε να προσθέσουμε και έναν επιπλέον όρο, ο οποίος ως θόρυβος θα παρίστανε τη μεταβολή της επιτάχυνσης με το χρόνο, δεδομένου ότι ένα πλοίο δε θα μπορούσε να διατηρήσει για κάποιο όχι πολύ μικρό χρονικό διάστημα σταθερή επιτάχυνση. Ο όρος που θα έπρεπε να προστεθεί τότε στην απόσταση s θα ήταν $\frac{1}{6} \frac{da}{dt} \Delta t^3$ και ο αντίστοιχος για την ταχύτητα v , $\frac{1}{2} \frac{da}{dt} \Delta t^2$.

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων - συμμεταβλητοτήτων του διανύσματος κατάστασης για τη στιγμή $t-1$ είναι:

$$\mathbf{Q}_x(t-1) = \begin{bmatrix} Q_{ss} & Q_{sv} \\ Q_{vs} & Q_{vv} \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης των συμμεταβλητοτήτων στη σχέση (3-5) έχουμε:

$$\mathbf{Q}_x'(t) = \mathbf{T} \mathbf{Q}_x(t-1) \mathbf{T}^T + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix}^T$$

όπου σ_a^2 η μεταβλητότητα της επιτάχυνσης.

Μέχρι εδώ λοιπόν είδαμε πώς από το γνωστό διάνυσμα κατάστασης για τη χρονική στιγμή $t-1$ μπορούμε να κάνουμε μία πρόβλεψη για το αντίστοιχο διάνυσμα τη στιγμή t , χωρίς να διαθέτουμε μετρήσεις.

Όπως ειπώθηκε και στην εισαγωγή το φίλτρο Kalman εφαρμόζεται όταν ανά χρονικά διαστήματα Δt διαθέτουμε μετρήσεις από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε τα επιθυμητά μεγέθη, δηλ. το διάνυσμα κατάστασης. Η ουσία ακριβώς του φίλτρου Kalman βρίσκεται στο ότι αυτό μας παρέχει ένα αποτέλεσμα (μια τελική εκτίμηση για το διάνυσμα κατάστασης) στη διαμόρφωση του οποίου συμβάλλει τόσο η πρόβλεψη για το διάνυσμα κατάστασης, όσο και το διάνυσμα κατάστασης το οποίο προκύπτει από τις μετρήσεις. Στην περίπτωση του πλοίου

αυτές οι μετρήσεις προκύπτουν από κάποιο σύστημα προσδιορισμού θέσης, όπως π.χ. ένα επίγειο ραδιοσύστημα ή ένα δορυφορικό σύστημα.

Ας θεωρήσουμε ότι η γραμμικοποιημένη εξίσωση παρατήρησης σε μορφή πινάκων είναι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v} \quad (3-6)$$

με αντίστοιχο πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων \mathbf{Q} .

Από την μαθηματική ανάλυση του βέλτιστου συνδυασμού μέτρησης-πρόγνωσης για την εκτίμηση του διάνυσματος κατάστασης $\hat{\mathbf{x}}$, προκύπτει ότι αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}'(t)) \quad (3-7)$$

όπου:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'}(t) \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}'}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})^{-1} \quad (3-8)$$

Ο πίνακας \mathbf{K} ονομάζεται **πίνακας κέρδους** (gain matrix). Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων της τελικής εκτίμησης $\hat{\mathbf{x}}$ είναι:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{A}) \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'} \quad (3-9)$$

Εδώ είναι ίσως η καλύτερη στιγμή για να επανέλθουμε στο θέμα που έχει μείνει ανοικτό, όταν έγινε λόγος για τη σχέση μετάβασης (σχέση 3-2). Δεν έχει διευκρινιστεί το πως θα γνωρίζουμε το διάνυσμα κατάστασης τη στιγμή $t-1$ ώστε να μεταβούμε από αυτό (μέσω του πίνακα μετάβασης \mathbf{T}) στο διάνυσμα κατάστασης κατά τη χρονική στιγμή t .

Από τη μέχρι τώρα συνοπτική περιγραφή του φίλτρου Kalman φάνηκε ότι για κάθε στιγμή $t-1$ έχουμε τρία διανύσματα κατάστασης για το πλοίο:

- το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}'(t-1)$ το οποίο προκύπτει από την πρόβλεψη (σχέση 3-2),
- το διάνυσμα κατάστασης που μπορεί να προκύψει από τις μετρήσεις (π.χ. με το GPS) και
- το διάνυσμα κατάστασης $\hat{\mathbf{x}}(t-1)$ το οποίο προκύπτει από το φίλτρο σαν τελική εκτίμηση.

Ποιό από τα τρία λοιπόν είναι αυτό που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στη σχέση μετάβασης; Είναι ευνόητο ότι το πλέον κατάλληλο είναι το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}(t-1)$. Η φυσική ερμηνεία αυτής της επιλογής είναι η εξής: Το διάνυσμα πρόγνωσης ενδέχεται να μην εκφράζει αξιόπιστα την πραγματική κατάσταση, εξαιτίας ενός μη ρεαλιστικού μαθηματικού μοντέλου μετάβασης (στην ουσία δηλαδή μη ρεαλιστικού πίνακα μετάβασης \mathbf{T}). Βέβαια για ένα τόσο απλό πρόβλημα, όπως αυτό που εξετάσαμε παραπάνω, δεν υπάρχει δυσκολία στον υπολογισμό του πίνακα \mathbf{T} . Αν

σκεφτούμε όμως την εφαρμογή του φίλτρου Kalman στην κίνηση ενός διαστημικού οχήματος, τότε γίνεται ξεκάθαρο ότι ο υπολογισμός ενός ρεαλιστικού πίνακα μετάβασης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος. Έτσι δε μπορεί η σχέση μετάβασης να μας οδηγήσει ακριβώς στην πραγματική κατάσταση του οχήματος. Με άλλα λόγια το διάνυσμα πρόβλεψης \mathbf{x}' θα διαφέρει λίγο ως πολύ από το αντίστοιχο που εκφράζει την πραγματική κατάσταση. Όμοια και το διάνυσμα που μπορεί να προκύψει από τις μετρήσεις θα διαφέρει από αυτό της πραγματικής κατάστασης, εξαιτίας τόσο των σφαλμάτων των μετρήσεων, όσο και του μαθηματικού μοντέλου επεξεργασίας τους (ουσιαστικά δηλαδή του πίνακα \mathbf{A}).

Αντίθετα το διάνυσμα της τελικής εκτίμησης $\hat{\mathbf{x}}$, προκύπτει από μία συνόρθωση πρόβλεψης και παρατηρήσεων και άρα είναι το πιο αξιόπιστο. Για το λόγο αυτό, είναι το διάνυσμα που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στη σχέση μετάβασης (σχέση 3-2), οπότε τώρα αυτή γίνεται:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}(t-1) \quad (3-10)$$

Στη συνέχεια ακολουθεί μία πιο ολοκληρωμένη θεωρητική περιγραφή της μεθόδου του φίλτρου Kalman, από την οποία θα φανεί με ποιο σκεπτικό και ποια κριτήρια οδηγούμαστε στις σχέσεις (3-6) ως (3-10).

3.2 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

3.2.1 Εισαγωγή

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Η ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (ΜΕΤ) έγινε από το μεγάλο γερμανό Μαθηματικό-Γεωδαίτη Gauss γύρω στα 1800. Η επόμενη σημαντική πρόοδος στο αντικείμενο της θεωρίας εκτίμησης πραγματοποιήθηκε μετά από 100 και πλέον χρόνια, όταν ο Fisher (γύρω στο 1910), εργαζόμενος με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, εισήγαγε την προσέγγιση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας. Αξιοποιώντας τη θεωρία στοχαστικής ανάλυσης ο Wiener (γύρω στα 1940) ανέπτυξε μία διαδικασία για το σχεδιασμό στοχαστικά βέλτιστων φίλτρων στο χώρο των συχνοτήτων. Περιορίστηκε όμως σε διαδικασία στατιστικά σταθερή και παρείχε βέλτιστες εκτιμήσεις μόνο για περίπτωση σταθερής κατάστασης. Την ίδια περίοδο ο Kolmogorov ασχολούνταν με το πρόβλημα του διακριτού χρόνου. Κατά τη διάρκεια των 20 επόμενων χρόνων, η εργασία του Wiener επεκτάθηκε για να περιλαμβάνει και μη σταθερά συστήματα. Ο Kalman και άλλοι (1960) παρήγαγαν τεχνικές βέλτιστων φίλτρων που βασιζόνταν σε σχέσεις κατάστασης-χώρου και χρόνου. Αυτή η προσέγγιση, γνωστή σήμερα ως φίλτρο Kalman, είναι ιδανική για εφαρμογή σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

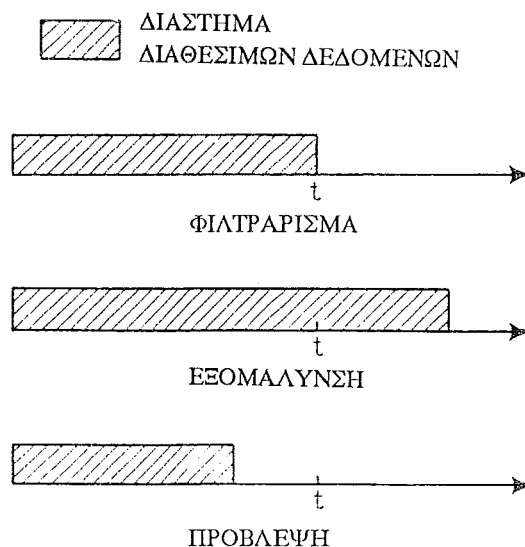
Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε δύο διαφορές μεταξύ των κλασικών και των νέων μεθόδων. Πρώτα είναι η χρήση της στοχαστικής ανάλυσης σε αντίθεση με την ντετερμινιστική περιγραφή και κατά δεύτερο λόγο η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών για την εφαρμογή αριθμητικών λύσεων αντίθετα με λύσεις κλειστών τύπων με "μολύβι και χαρτί" (Gelb, 1974).

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Ένας βέλτιστος εκτιμητής είναι ένας υπολογιστικός αλγόριθμος που επεξεργάζεται παρατηρήσεις για να εξασφαλίσει μία εκτίμηση ελάχιστου σφάλματος (σύμφωνα με κάποια κριτήρια βελτιστοποίησης) για την κατάσταση του συστήματος, χρησιμοποιώντας: τη γνώση της δυναμικής του συστήματος και των μετρήσεων, τη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου του συστήματος και των σφαλμάτων των μετρήσεων, καθώς και πληροφορίες για την αρχική κατάσταση.

Τρεις κατηγορίες προβλημάτων εκτίμησης φαίνονται στο σχήμα 3.1. Όταν η χρονική στιγμή για την οποία απαιτείται εκτίμηση συμπίπτει με τη στιγμή της τελευταίας μέτρησης, το πρόβλημα ονομάζεται **φιλτραρίσμα** (filtering). Αν η στιγμή που μας ενδιαφέρει βρίσκεται μέσα στο διάστημα για το οποίο έχουμε δεδομένα μετρήσεων, το πρόβλημα λέγεται **εξομάλυνση** (smoothing). Όταν τέλος η χρονική στιγμή, για την οποία ενδιαφερόμαστε, βρίσκεται μετά την τελευταία διαθέσιμη μέτρηση, το πρόβλημα λέγεται **πρόβλεψη** (prediction).

Η πιο κοινή τεχνική φιλτραρίσματος είναι αυτή που αναπτύχθηκε από τον Kalman, για την εκτίμηση της κατάστασης ενός γραμμικού συστήματος.



Σχήμα 3.1 Τρεις κατηγορίες προβλημάτων εκτίμησης (η εκτίμηση απαιτείται για τη χρονική στιγμή t).

3.2.2 Γραμμικά δυναμικά συστήματα

Η δυναμική ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να παρασταθεί από τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (Gelb, 1974):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3-11)$$

όπου $\mathbf{x}(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, $\mathbf{w}(t)$ είναι μία συνάρτηση στοχαστικών δυνάμεων, το $\mathbf{u}(t)$ εισάγει ντετερμινιστικό έλεγχο του συστήματος (γνωστές εκ των προτέρων επεμβάσεις) και οι πίνακες $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ συνδέουν γραμμικά τα τρία παραπάνω διανύσματα με την παράγωγο του διανύσματος κατάστασης ως προς το χρόνο.

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει έλεγχος του συστήματος $\mathbf{u}(t)$, ούτε συνάρτηση στοχαστικών δυνάμεων $\mathbf{w}(t)$ τότε η εξίσωση (3-11) γίνεται:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3-12)$$

Έστω ότι για κάποια δεδομένη χρονική στιγμή t_0 γνωρίζουμε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}(t_0)$. Το αντίστοιχο διάνυσμα για μία στιγμή $t \geq 0$ θα δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (3-13)$$

Ο πίνακας $\Phi(t, t_0)$ ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** (transition matrix) για το σύστημα της εξίσωσης (3-12).

Για τον πίνακα μετάβασης ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\Phi(t, t) = \mathbf{I} \quad \alpha)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad \beta) \quad (3-14)$$

$$\frac{d}{dt} |\Phi(t, t_0)| = \text{trace}[\mathbf{F}(t)] |\Phi(t, t_0)| \quad \gamma)$$

Για ένα σταθερό σύστημα, ο πίνακας \mathbf{F} είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ο πίνακας μετάβασης εξαρτάται μόνο από το χρονικό διάστημα $(t-t_0)$, δηλαδή:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t-t_0)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor για κάποιο χρόνο t_0 έχουμε:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0)(t-t_0) + \ddot{\mathbf{x}}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots \quad (3-15)$$

Από την εξίσωση (3-12) όμως έχουμε:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t_0)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}(t_0)$$

.

.

.

κ. λ. π.

Αντικαθιστώντας στη (3-13) έχουμε:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{F}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \frac{\mathbf{F}^2(t-t_0)^2}{2!}\mathbf{x}(t_0) + \dots$$

ή

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{F}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{F}^2(t-t_0)^2 + \dots \right) \mathbf{x}(t_0)$$

Συγκρίνοντας τη νέα εξίσωση με την (3-12) προκύπτει ότι:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \mathbf{F}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{F}^2(t-t_0)^2 + \dots \quad (3-16)$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}$$

3.2.3 Σύστημα στο οποίο συμμετέχουν και στοχαστικές συναρτήσεις δυνάμεων

Έχοντας υπολογίσει την ομογενή λύση, θα εξετάσουμε τώρα τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Θεωρούμε το αρχικό γραμμικό σύστημα που περιλαμβάνει επίδραση ντετερμινιστικών δυνάμεων:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3-17)$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό θεωρούμε ότι η επίδραση των δυνάμεων αυτών δίνεται από το ολοκλήρωμα των στοιχειωδών επιδράσεων που ασκούνται για κάποιο διάστημα Δt όταν το $\Delta t \rightarrow 0$, δηλαδή είναι:

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{L}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Έτσι η λύση της εξίσωσης (3-17) όταν γνωρίζουμε το διάνυσμα κατάστασης για τη στιγμή t_0 είναι:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{L}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-18)$$

Όταν εισάγουμε και στοχαστικές δυνάμεις ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) + \mathbf{L}(t) \mathbf{u}(t) \quad (3-19)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{L}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-20)$$

ΘΕΩΡΗΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Αν μας ενδιαφέρει το σύστημα σε διακριτές χρονικές στιγμές t_k , $k=1, 2, 3, \dots$ από τη σχέση (3-20) έχουμε:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{w}_k + \Lambda_k \mathbf{u}_k \quad (3-21)$$

όπου:

$$\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k) \quad \alpha)$$

$$\Gamma_k \mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad \beta) \quad (3-22)$$

$$\Lambda_k \mathbf{u}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{L}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \gamma)$$

Σημειώνεται ότι αν $\mathbf{w}(t)$ είναι στοχαστικό διάνυσμα, τότε τα \mathbf{x}_k και $\Gamma_k \mathbf{w}_k$ είναι επίσης στοχαστικά διανύσματα.

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΗΤΩΝ

Τα διανύσματα κατάστασης και στοχαστικών δυνάμεων περιέχουν στοιχεία που είναι στοχαστικές μεταβλητές. Η συνάρτηση στοχαστικών δυνάμεων w θεωρείται ασυσχέτιστη με το χρόνο, και καλείται **λευκός θόρυβος** (white noise). Για τη διακριτή θεώρηση, η συνάρτηση w_k θεωρείται ασυσχέτιστη από στιγμή παρατήρησης σε στιγμή παρατήρησης (white sequence). Στη συνέχεια του κεφαλαίου θεωρούμε ότι το διάνυσμα του ντετερμινιστικού ελέγχου του συστήματος u είναι μηδέν.

Γενικά, θεωρούμε ότι οι στοχαστικές μεταβλητές έχουν τιμές προσδοκίας μηδέν, δηλαδή θεωρούνται ανεπηρέαστες. Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η κατάσταση σε κάποια χρονική στιγμή t_0 είναι ανεπηρέαστη, η κατάσταση θα εξακολουθήσει να είναι ανεπηρέαστη και στις επόμενες στιγμές. Αυτό φαίνεται αν υπολογίσουμε την προσδοκία στα δύο μέλη εξίσωσης (3-21) για $u_k = 0$:

$$\begin{aligned} E[x_{k+1}] &= E[\Phi_k x_k + \Gamma_k w_k] \\ &= \Phi_k E[x_k] + \Gamma_k E[w_k] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-23)$$

Ορίζουμε το σφάλμα στην εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης \tilde{x} , ως τη διαφορά ανάμεσα στην εκτίμηση \hat{x} και στην πραγματική τιμή x :

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (3-24)$$

Η μεταβλητότητα του \tilde{x} , που συμβολίζεται με P , δίνεται από τη σχέση:

$$P = E[\tilde{x} \tilde{x}^T] \quad (3-25)$$

και παρέχει ένα στατιστικό μέτρο της αβεβαιότητας του x .

Οι συναρτήσεις στοχαστικών δυνάμεων περιγράφονται επίσης από τους πίνακες μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων τους. Για τη θεώρηση συνεχούς χρόνου, ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των στοχαστικών δυνάμεων λευκού θορύβου, Gw , δίνεται από τη σχέση:

$$E[(G(t)w(t)) (G(\tau)w(\tau))^T] = G(t)Q(t)G^T(t)\delta(t-\tau) \quad (3-26)$$

όπου δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac *.

* Η συνάρτηση Dirac ορίζεται με αυστηρό μαθηματικό τρόπο ως εξής (π.χ., Κατσάμπαλος και Τζιαβός, 1991):

$$\delta(x) = 0 \quad \text{για } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Για τη θεώρηση διακριτού χρόνου ο αντίστοιχος πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων για ασυσχέτιστη διαδοχή $\Gamma_k w_k$ είναι:

$$E [(\Gamma_k w_k) (\Gamma_l w_l)^T] = \begin{cases} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (3-27)$$

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του θορύβου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την σχέση (3-22) β):

$$\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \quad (3-28)$$

Εδώ χρειάζεται να γίνει μία διευκρίνιση για τους πίνακες $Q(t)$ και Q_k . Ο πρώτος είναι ένας πίνακας φασματικής πυκνότητας, ενώ ο δεύτερος είναι πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα εκτίμησης της κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος για το οποίο γνωρίζουμε για μία χρονική στιγμή t_k το διάνυσμα κατάστασης x και την αβεβαιότητά του που εκφράζεται από τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του σφάλματος:

$$P_k = E[\tilde{x} \tilde{x}^T] \quad (3-29)$$

Η εκτίμηση για μία μεταγενέστερη στιγμή, t_{k+1} , που θα έχει ανεπηρέαστο σφάλμα, είναι:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k \quad (3-30)$$

Από τις εξισώσεις (3-21) και (3-30) προκύπτει ότι:

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \tilde{x}_k - \Gamma_k w_k$$

Αν για το διάστημα (t_k, t_{k+1}) συμμετέχουν στο σύστημα και ντετερμινιστικές δυνάμεις τότε ισχύει:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k w_k + \Lambda_k u_k \quad (3-31)$$

Καθώς όμως αυτές είναι ντετερμινιστικές, το σφάλμα της εκτίμησης παραμένει αμετάβλητο.

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του σφάλματος P_{k+1} είναι:

$$\mathbf{P}_{k+1} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] \quad (3-32)$$

Θεωρώντας το σφάλμα εκτίμησης για t_k και το θόρυβο $\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{w}_k$ ασυσχέτιστα μεγέθη, προκύπτει ότι:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{\Gamma}_k^T \quad (3-33)$$

3.2.4 Βέλτιστα γραμμικά φίλτρα

Ας θεωρήσουμε ότι το σύνολο των l μετρήσεων, \mathbf{z} , μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των n στοιχείων του διανύσματος των αγνώστων \mathbf{x} συν ένα προστιθέμενο στοχαστικό σφάλμα, \mathbf{v} . Ισχύει δηλαδή:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (3-34)$$

όπου \mathbf{H} ο πίνακας σχεδιασμού του συστήματος.

Η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων με βάρη είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (3-35)$$

όπου \mathbf{R}^{-1} είναι $l \times l$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας βάρους.

Αν θεωρήσουμε δεδομένη μία a priori εκτίμηση για την κατάσταση του συστήματος σε μία χρονική στιγμή t_k (τη συμβολίζουμε με $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$), μπορούμε να έχουμε μία νέα εκτίμηση, $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$, η οποία βασίζεται στη χρησιμοποίηση της μέτρησης \mathbf{z}_k (Gelb et al, 1974):

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (3-36)$$

όπου \mathbf{K}'_k και \mathbf{K}_k χρονικά μεταβαλλόμενοι πίνακες βάρους, που μέχρι τώρα δεν έχουν οριστεί.

3.2.5 Φίλτρο Kalman για διακριτό χρόνο

Σε αντιστοιχία με τη σχέση (3-24) ορίζουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k(+) \quad (3-37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(-) = \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k(-) \quad (3-38)$$

όπου $(-)$ και $(+)$ σημαίνουν τις χρονικές στιγμές ακριβώς πριν και ακριβώς

μετά από μία διακριτή μέτρηση αντίστοιχα.

Μια εξίσωση για το σφάλμα εκτίμησης προκύπτει από τις εξισώσεις (3-36) και (3-34):

$$\tilde{\mathbf{x}}_k (+) = [\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k - \mathbf{I}] \mathbf{x}_k + \mathbf{K}'_k \tilde{\mathbf{x}}_k (-) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (3-39)$$

Εξ ορισμού είναι $E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}$. Αν επίσης $E[\tilde{\mathbf{x}}_k (-)] = \mathbf{0}$, η εκτίμηση θα είναι ανεπηρεάστη (δηλ. $E[\tilde{\mathbf{x}}_k (+)] = \mathbf{0}$, για οποιοδήποτε διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x}_k μόνο όταν ο όρος στην αγκύλη είναι μηδέν. Γι' αυτό είναι αναγκαίο να ισχύει:

$$\mathbf{K}'_k = \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \quad (3-40)$$

οπότε η εκτίμηση παίρνει τη μορφή:

$$\hat{\mathbf{x}}_k (+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_k (-) + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (3-41)$$

ή

$$\hat{\mathbf{x}}_k (+) = \hat{\mathbf{x}}_k (-) + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k (-)] \quad (3-42)$$

Το αντίστοιχο σφάλμα εκτίμησης είναι:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k (+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \tilde{\mathbf{x}}_k (-) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (3-43)$$

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων μετά την μέτρηση είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k (+) = E \{ & (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \tilde{\mathbf{x}}_k (-) [\tilde{\mathbf{x}}_k (-)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T] + \\ & + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k [\tilde{\mathbf{x}}_k (-)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T] \} \end{aligned} \quad (3-44)$$

Εξ ορισμού είναι:

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k (-) \tilde{\mathbf{x}}_k (-)^T] = \mathbf{P}_k (-) \quad (3-45)$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k \quad (3-46)$$

οπότε, επειδή τα σφάλματα των μετρήσεων είναι ασυσχέτιστα, ισχύει:

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k (-) \mathbf{v}_k^T] = E[\mathbf{v}_k \tilde{\mathbf{x}}_k (-)^T] = 0 \quad (3-47)$$

Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{P}_k (+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k (-) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (3-48)$$

Για τη βέλτιστη επιλογή του \mathbf{K}_k επιλέγουμε ως κριτήριο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα $\mathbf{P}_k (+)$. Έτσι προκύπτει τελικά:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k (-) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k (-) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (3-49)$$

Ο πίνακας \mathbf{K}_k είναι γνωστός και ως **πίνακας κέρδους** (gain matrix) του Kalman.

Η βελτιστοποιημένη τιμή του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων μετά τη μέτρηση είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k (+) &= \mathbf{P}_k (-) - \mathbf{P}_k (-) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k (-) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k (-) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k (-) \end{aligned} \quad (3-50)$$

Μέχρι εδώ ασχοληθήκαμε με την διακριτού χρόνου εκτίμηση της κατάστασης και τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων αναφερόμενοι σε μία μέτρηση. Επεκτείνοντας τα παραπάνω για να ισχύουν μεταξύ των μετρήσεων έχουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_k (-) = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} (+) \quad (3-51)$$

$$\mathbf{P}_k (-) = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} (+) \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (3-52)$$

Αποδεικνύεται ότι ο \mathbf{K}_k μπορεί να γραφτεί και με την εξής απλούστερη μορφή:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k (+) \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (3-53)$$

3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN ΣΤΟ GPS

3.3.1 Εισαγωγή

Η τεχνική του φίλτρου Kalman έχει βρει μέχρι σήμερα εφαρμογές σ' ένα ευρύτατο πεδίο των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή του φίλτρου στο GPS, όταν αυτό χρησιμοποιείται στη ναυσιπλοΐα. Όπως αναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 2.2, το GPS έχει καταξιωθεί πια ως σύστημα εντοπισμού θέσης στη θάλασσα και προβλέπεται ότι στο μέλλον θα προσφέρει τον αποκλειστικό τρόπο για πλοήγηση. Σ' αυτό συντελούν τα πολλά του πλεονεκτήματα, η υψηλή του ακρίβεια και το συνεχώς μειωνόμενο κόστος των δεκτών.

Δεν πρέπει όμως να θεωρηθεί ότι το GPS είναι ένα σύστημα τέλειο, το οποίο δεν έχει κάποια αδύνατα σημεία. Το σημαντικότερο από αυτά αφορά τις δυνατότητές του όταν χρησιμοποιείται στον απόλυτο κινηματικό προσδιορισμό θέσης, όπως δηλαδή χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στη ναυσιπλοΐα. Είναι γνωστό ότι τότε πα-

ρέχει τα λιγότερο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με όλες τις άλλες μεθόδους μέτρησης με αυτό. Επιπλέον μετά την εφαρμογή της επιλεκτικής διαθεσιμότητας από τον Ιούλιο του 1991 (βλ. υποκεφάλαιο 2.2), ο απόλυτος προσδιορισμός παρέχει ακόμα λιγότερο αξιόπιστα αποτελέσματα.

Αυτές λοιπόν οι "αδυναμίες" του GPS σημαίνουν στην πράξη δύο πράγματα. Πρώτα ότι η θέση που προσδιορίζεται είναι μία προσέγγιση της πραγματικής θέσης του πλοίου με μία ακρίβεια της τάξης των 25 μέτρων ή ακόμα και των 100 μέτρων λαμβάνοντας υπόψη την επιλεκτική διαθεσιμότητα. Κατά δεύτερο λόγο εξαιτίας της δυναμικής κατάστασης που βρίσκεται ο δέκτης (κίνηση του πλοίου, επίδραση κυμάτων, ρευμάτων, ανέμου), τα αποτελέσματα περιέχουν κάποια επίπεδα θορύβου πολύ υψηλότερα απ' ότι στο στατικό προσδιορισμό.

Αν λοιπόν θέλουμε να αυξήσουμε την αποδοτικότητα του GPS ως μέσου πλοήγησης, πρέπει να βρούμε τρόπους που αφ' ενός να αυξάνουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του και εφ' ετέρου να περιορίζουν το θόρυβο των μετρήσεων. Όσο αφορά την αξιοπιστία είναι γνωστό ότι αυτή αυξάνεται όταν γίνεται σχετικός προσδιορισμός ή όταν το GPS υποστηρίζεται από άλλο σύστημα. Για το πρόβλημα του θορύβου η μέθοδος αντιμετώπισης είναι συνήθως η εφαρμογή ενός φίλτρου αληθούς χρόνου στις μετρήσεις.

Σκοπός του υποκεφαλαίου αυτού είναι να παραθέσει τους τρόπους εφαρμογής του φίλτρου Kalman στο GPS, ώστε να μπορέσουμε στο κεφάλαιο 4 να εξάγουμε συμπεράσματα για τον αν και κατά πόσο αυτή η τεχνική φιλτραρίσματος αυξάνει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων και μειώνει το θόρυβό τους.

3.3.2 Μορφή δεδομένων του GPS

Για να δούμε λοιπόν πώς εφαρμόζεται το φίλτρο Kalman στο GPS, πρέπει να γνωρίζουμε ποια είναι η μορφή των δεδομένων που μας παρέχουν οι δέκτες του δορυφορικού αυτού συστήματος.

Οι δέκτες του GPS που χρησιμοποιούνται στη ναυσιπλοΐα είναι βασικά δύο ειδών: αυτοί που έχουν δύο κανάλια και μετρούν μόνο ψευδοαποστάσεις (με τον κώδικα C/A) και αυτοί που έχουν πέντε κανάλια και μετρούν τόσο ψευδοαποστάσεις όσο και ακτινικές ταχύτητες (Λιαπάκης 1991). Και στις δύο περιπτώσεις ο χρήστης εκτός από τις συντεταγμένες του πλοίου, έχει στη διάθεσή του και τις παρατηρούμενες ψευδοαποστάσεις καθώς και τα στοιχεία του ναυτιλιακού μηνύματος. Οι δέκτες όμως που μετρούν και ακτινικές ταχύτητες μπορούν μαζί με όλα τα παραπάνω στοιχεία να παρέχουν και τις συνιστώσες της ταχύτητας του πλοίου σε τρεις διευθύνσεις (φ,λ,η). Γίνεται φανερό λοιπόν ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες θέσης και ταχύτητας όπως δίνονται από το δέκτη, ή να υπολογίζουμε τα μεγέθη αυτά από τα ναυτιλιακά μηνύματα των δορυφόρων και τα στοιχεία καταγραφής του δέκτη. Ο αναλυτικός υπολογισμός των συντεταγμένων θέσης επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε στο υποκεφάλαιο 2.3. Η

αντίστοιχη εργασία όμως για τις συνιστώσες της ταχύτητας είναι πιο περίπλοκη. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν γνωρίζουμε τη σχετική ταχύτητα (ακτινική) μεταξύ δορυφόρου-δέκτη και θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του δέκτη, πρέπει να ξέρουμε ποια είναι η ταχύτητα του δορυφόρου. Οι μαθηματικές σχέσεις όμως που παρέχουν τις ταχύτητες των δορυφόρων πάνω στις τροχιές τους συναρτήσε των στοιχείων των εφημερίδων τους είναι αρκετά πολύπλοκες.

3.3.3 Μοντέλα του φίλτρου Kalman για το GPS

Η μορφή που θα έχει το φίλτρο εξαρτάται από την παραδοχή που θα κάνουμε για την κίνηση του πλοίου και από το ποια θα είναι τα δεδομένα του δέκτη που θα χρησιμοποιήσουμε.

Για το είδος της κίνησης του πλοίου δύο είναι οι θεωρήσεις που γίνονται συνήθως. Σύμφωνα με την πρώτη δεχόμαστε ότι το πλοίο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, δηλαδή με σταθερή ταχύτητα. Σύμφωνα με τη δεύτερη θεωρούμε ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, δηλαδή γίνεται με σταθερή επιτάχυνση. Πρέπει όμως να κάνουμε εδώ μία σημαντική διευκρίνιση. Η θεώρηση κάποιου από τα δύο είδη κίνησης αφορά μόνο τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η πρόβλεψη, δηλαδή τη σχέση μετάβασης (σχέσεις 3-2, 3-21). Δε σημαίνει ότι το φίλτρο μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν το πλοίο κινείται πάνω σε ευθεία. Όταν το πλοίο κινείται πάνω σε στροφή, το φίλτρο το “αντιλαμβάνεται” αυτό από τις μετρήσεις του GPS. Με τον ίδιο τρόπο γίνονται αντιληπτές τόσο οι επιταχύνσεις, όταν θεωρούμε σταθερή ταχύτητα, όσο και οι μεταβολές στην επιτάχυνση, όταν θεωρούμε σταθερή επιτάχυνση. Απλά οι φιλτραρισμένες τιμές που παρέχει το φίλτρο, προκύπτουν από μία συνεκτίμηση των μετρήσεων και της πρόβλεψης, η οποία γίνεται θεωρώντας ότι το πλοίο κινείται κατά το διάστημα μεταξύ των μετρήσεων ευθύγραμμα, είτε με σταθερή ταχύτητα είτε με σταθερή επιτάχυνση. Για να γίνει σωστά η συνεκτίμηση μεταξύ μετρήσεων-πρόβλεψης, πρέπει και τα δύο αυτά μεγέθη να συμμετέχουν στη συνόρθωση με τα πραγματικά τους βάρη. Πρέπει δηλαδή να γνωρίζουμε όσο το δυνατό καλύτερα τις μεταβλητότητές τους.

Το ζήτημα πάντως του κατά πόσο το φίλτρο μπορεί να εφαρμοστεί για κίνηση του πλοίου πάνω σε στροφές απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή. Αυτό που είναι βέβαιο και έχει αποδειχτεί και στην πράξη, είναι ότι ένα φίλτρο σταθερής ταχύτητας εξακολουθεί να δίνει αποτελέσματα και όταν το πλοίο κινείται πάνω σε καμπύλη. Αυτό όμως που έχει σημασία είναι αν οι φιλτραρισμένες αυτές τιμές αντιπροσωπεύουν μία καμπυλόγραμμη πορεία της ίδιας μορφής με την πραγματική πορεία που διέγραψε το πλοίο, που να είναι επιπλέον και εξομαλυμένη από το θόρυβο των μετρήσεων. Το ερώτημα αυτό θα γίνει πιο κατανοητό στο τέταρτο κεφάλαιο, όπου και θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία απάντηση.

Συνδυάζοντας τις δύο παραδοχές για την κίνηση με τα είδη των δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε από το δέκτη, προκύπτουν τα διάφορα μοντέλα του φίλτρου Kalman για εφαρμογή στο GPS. Αυτά είναι (Λιαπάκης 1991):

- μοντέλο σταθερής ταχύτητας με παρατηρήσεις τις συνιστώσες θέσης.
- μοντέλο σταθερής ταχύτητας με παρατηρήσεις τις συνιστώσες θέσης, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων.
- μοντέλο σταθερής επιτάχυνσης με παρατηρήσεις τις συνιστώσες θέσης και ταχύτητας.
- μοντέλο σταθερής επιτάχυνσης με παρατηρήσεις τις συνιστώσες θέσης και ταχύτητας, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων.
- μοντέλο σταθερής επιτάχυνσης με παρατηρήσεις τις ψευδοαποστάσεις και ακτινικές ταχύτητες.

Εκτός από αυτά τα μοντέλα έχει διερευνηθεί και η εφαρμογή ενός μοντέλου σταθερής ταχύτητας με παρατηρήσεις τις συνιστώσες θέσης, με ταυτόχρονη χρήση δρομόμετρου και πυξίδας (Λιαπάκης 1991). Στην περίπτωση αυτή τα δεδομένα από τα όργανα χρησιμοποιούνται για να γίνει η πρόβλεψη των ταχυτήτων του πλοίου. Για να είναι αποτελεσματικό το μοντέλο αυτό, απαιτείται η χρήση πολύ ακριβούς δρομόμετρου και η αύξηση που επιτυγχάνεται στην ακρίβεια δεν είναι σημαντική.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα γίνει μία συνοπτική περιγραφή των μοντέλων που αναφέρθηκαν.

3.3.4 Κριτήρια επιλογής μοντέλου σταθερής ταχύτητας ή σταθερής επιτάχυνσης

Για να μπορούμε να κάνουμε την επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου για το φίλτρο, πρέπει αφ' ενός μεν να γνωρίζουμε τις μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν το μοντέλο και αφ' ετέρου δε τη φυσική τους σημασία. Γενικά δύο είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση ενός κινητού: Ο δυναμικός και ο κινηματικός. Ο πρώτος απαιτεί γνώση όλων των δυνάμεων που επενεργούν στο κινητό και που η συνισταμένη τους καθορίζει το είδος της κίνησης. Ο δεύτερος στηρίζεται στην ύπαρξη μετρήσεων για το κινητό, από τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί η κίνησή του (Lachapelle 1989). Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, για την περίπτωση ενός πλοίου, κατάλληλος τρόπος για να περιγράψουμε την κίνησή του είναι ο κινηματικός. Αν σκεφτεί κανείς καλύτερα, θα διαπιστώσει σύντομα ότι είναι και ο μοναδικός που μπορεί να έχει πρακτικές εφαρμογές. Η χρήση ενός δυναμικού τρόπου προσέγγισης θα σήμαινε ότι για το πλοίο έπρεπε να γνωρίζουμε ποια ακριβώς είναι η ισχύς της μηχανής του, τι ποσοστό αυτής μεταφέρεται από την προπέλα στο πλοίο, ποια είναι η αντίσταση του νερού στην κίνηση, ποια είναι η αντίσταση των κυμάτων, του ανέμου, τυχόντων ρευμάτων κ.λ.π.. Καθώς όλοι αυτοί οι παράγοντες είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι θα έπρεπε να έχουμε διαρκώς κάποια εκτίμηση για την επίδρασή τους, που σημαίνει ότι θα

έπρεπε να μετράμε με κάποιο τρόπο πολλά από τα παραπάνω μεγέθη. Γίνεται λοιπόν σαφές ότι για την περίπτωση ενός πλοίου που εξετάζουμε εδώ, ο τρόπος που θα χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε την κίνησή του θα είναι ο κινηματικός.

Κινηματικά μοντέλα υπάρχουν πολλά. Εδώ θα εξετάσουμε αυτά που χρησιμοποιούν το διάνυσμα θέσης του κινητού $\mathbf{r}(t)$, το διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ και το διάνυσμα επιτάχυνσης $\mathbf{a}(t)$. Αυτά είναι:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T \quad (3-54)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left[\frac{dx}{dt} \ \frac{dy}{dt} \ \frac{dz}{dt} \right]^T \quad (3-55)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \left[\frac{d^2x}{dt^2} \ \frac{d^2y}{dt^2} \ \frac{d^2z}{dt^2} \right]^T \quad (3-56)$$

Θεωρητικά τα τρία μοντέλα είναι ισοδύναμα αφού περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο την ίδια κίνηση. Βέβαια τα δύο τελευταία προϋποθέτουν τη γνώση των αρχικών συνθηκών. Ποιό λοιπόν μοντέλο πρέπει να υιοθετήσει κανείς; Καταρχήν για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών, φαίνεται ότι θα πρέπει το μοντέλο που θα επιλεγεί να ταιριάζει με το είδος των μετρήσεων.

Εξετάζοντας τα μοντέλα βλέπουμε ότι η μετάβαση από το πρώτο στο τρίτο μοντέλο απαιτεί διαφορίση. Στην περίπτωση που δεν διαθέτουμε συνεχείς αλλά διακριτές μετρήσεις, η διαφορίση πρέπει να γίνει αριθμητικά. Επειδή πρόκειται για μία ασταθή διαδικασία, χωρίς την κατάλληλη μέριμνα στους υπολογισμούς ο θόρυβος του μοντέλου θα αυξάνεται και θα μειώνει πολύ την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η αντίστροφη μετάβαση από το τρίτο στο πρώτο μοντέλο απαιτεί ολοκλήρωση που ναί μεν είναι μία σταθερή διαδικασία, αλλά είναι ταυτόχρονα ευαίσθητη σε σφάλματα των αρχικών τιμών (Lachapelle, 1989).

Γίνεται εμφανές λοιπόν ότι η επιλογή του μοντέλου βρίσκεται σε άμεση εξάρτηση από το είδος των μετρήσεων που διαθέτουμε. Δε θα έπρεπε δηλαδή σε καμιά περίπτωση να χρησιμοποιούμε το πρώτο μοντέλο για να εκτιμήσουμε ταχύτητα και επιτάχυνση, έχοντας μετρήσεις μόνο για τη θέση.

Έχοντας ξεκαθαρίσει λοιπόν αυτό, πρέπει να ασχοληθούμε με το πρόβλημα της παρεμβολής μεταξύ των διακριτών τιμών των μετρήσεων. Κάτι τέτοιο είναι σημαντικό καθώς στην πλειοψηφία των εφαρμογών οι διαθέσιμες μετρήσεις αφορούν διακριτές χρονικές στιγμές. Για τη μετάβαση από τη χρονική στιγμή t_i στην t_{i+1} ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{\mathbf{r}}_i \frac{\Delta t^3}{6} + \dots$$

όπου $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

και $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$, $\dddot{\mathbf{r}}_i$ οι παράγωγοι του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο.

Υιοθετώντας το μοντέλο της σχέσης (3-54) μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο μοντέλα (Lachapelle, 1989):

- το μοντέλο της σταθερής ταχύτητας όπου:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t \quad (3-57)$$

- το μοντέλο της σταθερής επιτάχυνσης όπου:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3-58)$$

Η επιλογή του ενός από τα δύο αυτά μοντέλα εξαρτάται από την κίνηση του πλοίου και το χρονικό διάστημα Δt . Για ένα πλοίο που κινείται χωρίς έντονες αυξομειώσεις στην ταχύτητά του και το Δt είναι μικρό, το κατάλληλο μοντέλο είναι το πρώτο. Αντίθετα όταν η κίνηση δε γίνεται με σταθερή ταχύτητα και το διάστημα μεταξύ των μετρήσεων είναι μεγάλο τότε χρειάζεται απαραίτητα η εφαρμογή του δεύτερου μοντέλου. Διερεύνηση χρειάζεται η περίπτωση της επιλογής ενός από τα δύο μοντέλα, όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε καμπύλες κινήσεις.

3.3.5 Προσδιορισμός της δυναμικής ενός συγκεκριμένου πλοίου

Μέχρι εδώ είδαμε ποια είναι τα μοντέλα που μπορούν να εφαρμοστούν για τον προσδιορισμό της κίνησης του πλοίου. Ένα ερώτημα που γεννιέται εδώ είναι αν για κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο ο τρόπος εφαρμογής του είναι κοινός για πλοία κάθε είδους. Έστω δηλαδή ότι θεωρούμε το μοντέλο σταθερής ταχύτητας και θέλουμε να το εφαρμόσουμε σε ένα μικρό, γρήγορο και ευκίνητο σκάφος και σε ένα μεγάλο, βαρύ και συνεπώς δυσκίνητο φορτηγό πλοίο. Η αντιμετώπιση θα είναι κοινή; Όταν δηλαδή κάνουμε πρόβλεψη για το διάνυσμα κατάστασης της επόμενης στιγμής, θα θεωρήσουμε ότι και τα δύο κινητά έχουν τις ίδιες πιθανότητες να κινηθούν ευθύγραμμα και ομαλά όπως προβλέπει το μοντέλο; Δε θα ήταν πιο λογικό η πρόβλεψη για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του μικρού σκάφους να είναι πιο αβέβαιη από την αντίστοιχη για το φορτηγό; Είναι γνωστό ότι αυτή η αβεβαιότητα εκφράζεται από τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμεταβλητοτήτων της πρόβλεψης. Πως όμως και με ποια κριτήρια θα διαφοροποιήσουμε τον πίνακα αυτό ώστε να ανταποκρίνεται και στις δύο περιπτώσεις;

Το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε εδώ είναι ένα γενικότερο πρόβλημα πρόγνωσης και συγκεκριμένα είναι ένα πρόβλημα πρόγνωσης των τιμών μιας στοχαστικής συνάρτησης. Η στοχαστική συνάρτηση στην περίπτωσή μας είναι

η ταχύτητα που εξαρτάται από το χρόνο. Οι τιμές της δεν μπορούν να είναι γνωστές, αλλά η εμφάνισή τους διέπεται από κάποιες πιθανότητες. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της πρόγνωσης ακολουθείται η συνηθισμένη τακτική στις γεωδαιτικές εφαρμογές (όπως για παράδειγμα στη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής στη Φυσική Γεωδαισία), κατά τις οποίες υπολογίζονται κάποιες **συναρτήσεις αυτοσυμμεταβλητότητας** (autocovarience functions). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε **συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation functions). Για να τις εισάγουμε δίνουμε σύντομα πρώτα την προσδοκία μιας στοχαστικής μεταβλητής $x(t)$ εξαρτημένης από το χρόνο (Papoulis 1965):

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;t)dx$$

όπου $f(x;t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής των τιμών της συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως εξής:

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 x_1 x_2 f_2(x_1,t_1;x_2,t_2)$$

Η συνάρτηση αυτοσυμμεταβλητότητας ορίζεται αντίστοιχα:

$$C(t_1,t_2) = [x(t_1)-E[x(t_1)] [x(t_2)-E[x(t_2)]]]$$

Μεταξύ των δύο συναρτήσεων ισχύει η σχέση:

$$C(t_1,t_2) = \varphi_{xx}(t_1,t_2) - E[x(t_1)] E[x(t_2)]$$

Η μεταβλητότητα μιας τυχαίας μεταβλητής είναι:

$$\sigma^2_{x(t)} = C(t,t) = \varphi_{xx}(t,t) - E^2[x(t)]$$

Οι αυτοσυσχετίσεις πολλών φυσικών φαινομένων εκφράζονται συχνά από μία εκθετική συνάρτηση της μορφής:

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} + m^2 \quad (3-59)$$

όπου m η μέση τιμή της στοχαστικής συνάρτησης. Η ποσότητα $1/\alpha$ ονομάζεται χρόνος συσχέτισης και το α μήκος συσχέτισης. Η φυσική σημασία αυτής της συνάρτησης είναι ότι η συσχέτιση μεταξύ των τιμών της στοχαστικής συνάρτησης ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο. Μια συνάρτηση αυτής της μορφής περιγράφει πλήρως τη στατιστική συμπεριφορά μιας στοχαστικής συνάρτησης Gauss-Markov, της οποίας

οι στατιστικές ιδιότητες παραμένουν αμετάβλητες με το χρόνο. Μια στοχαστική συνάρτηση είναι Gauss-Markov 1ης τάξης όταν ικανοποιεί τις παρακάτω παραδοχές: Για κάθε k και $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ισχύει ότι:

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1})]$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.

Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη, η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνάρτηση Markov πρώτης τάξης και εκφράζεται από μία διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t)x = w \quad (3-60)$$

όπου w είναι λευκός θόρυβος (βλ. υποκεφάλαιο 3.2)

Θεωρώντας στη συνέχεια ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του θορύβου ακολουθεί την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss), έχουμε μία συνάρτηση Gauss-Markov 1ης τάξης. Η φασματική πυκνότητα (δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης) του λευκού θορύβου w , ο οποίος δημιουργείται από μία συνάρτηση που περιγράφεται από την εξίσωση (3-59) είναι (Unger et. al., 1970):

$$q = 2\alpha s^2 \delta(\tau) \quad (3-61)$$

όπου $\delta(\tau)$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac (βλ. υποκεφάλαιο 3.2). Η ποσότητα αυτή χρειάζεται στον υπολογισμό του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του θορύβου που δίνεται από τη σχέση (3-28).

Βλέπουμε λοιπόν πως αν γνωρίζουμε την μορφή της εκθετικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, τότε γνωρίζουμε τη διαφορική συνάρτηση που ικανοποιεί η στοχαστική συνάρτηση (σχέση 3-60) καθώς και τη φασματική πυκνότητα του θορύβου (σχέση 3-61). Η διακριτή μορφή μιας εκθετικά συσχετισμένης τυχαίας ποσότητας δίνεται από τη σχέση:

$$x_{k+1} = e^{-\alpha(t_{k+1} - t_k)} x_k + w_k \quad (3-62)$$

3.3.6 Τεχνικές αυτοσυσχέτισης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα τιμών μιας χρονικά μεταβαλλόμενης στοχαστικής συνάρτησης x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, που έχουν ληφθεί σε σταθερά χρονικά διαστήματα Δt . Η μέση τιμή του δείγματος και η δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζονται αντίστοιχα ως εξής (Gelb, 1974):

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3-63)$$

$$\varphi_{xx}(\Delta t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - m)(x_{i+1} - m) \quad (3-64)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές υπολογίζουμε τις τιμές της δειγματικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για διαστήματα που είναι ακέραια πολλαπλάσια του Δt . Στις διακριτές τιμές που προκύπτουν προσπαθούμε να προσαρμόσουμε μία συνάρτηση συγκεκριμένης μορφής (γραμμική, εκθετική, κ.λ.π.) χρησιμοποιώντας τη ΜΕΤ, ώστε να προσαρμόζεται όσο το δυνατό καλύτερα στο σύνολο των διακριτών τιμών. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας.

Αν και φαινομενικά κάτι τέτοιο είναι απλό, στην εφαρμογή του απαιτείται προσοχή. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους. Πρώτα πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι το πλήθος των τιμών της συνάρτησης (δηλαδή το N) είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε ρεαλιστικές τιμές. Επίσης πρέπει το διάστημα Δt να είναι τέτοιο, ώστε να μπορεί να εκφράζει τις μεταβολές της συνάρτησης με το χρόνο. Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά τη σημασία των παραπάνω παραγόντων.

Ας θεωρήσουμε ένα πλοίο που κινείται για δύο ώρες και σε κάποιες στιγμές αξιολογεί τις οριακές του δυνατότητες, δηλαδή πραγματοποιεί πολύ κλειστές στροφές ή αυξομειώνει απότομα την ταχύτητά του. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι αυτές οι μεταβολές συμβαίνουν μετά την πρώτη μισή ώρα της πορείας. Στο αρχικό διάστημα η κίνηση είναι ομαλή και γίνεται με σταθερή ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται πολύ αργά με το χρόνο και άρα είναι έντονα συσχετισμένη από μέτρηση σε μέτρηση. Αν για τον προσδιορισμό των τιμών της δειγματικής συνάρτησης χρησιμοποιούμε μόνο τα δεδομένα της πρώτης μισής ώρας, τότε θα πάρουμε μία εμπειρική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για την ταχύτητα που θα φθίνει αργά με το χρόνο. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την εμπειρική συνάρτηση για να κάνουμε πρόβλεψη, είναι σα να θεωρούμε ότι το πλοίο δε μπορεί να μεταβάλλει απότομα την ταχύτητά του, πράγμα που είναι εσφαλμένο. Όμοια, αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τις μετρήσεις του διαστήματος κατά το οποίο το κινητό μεταβάλλει διαρκώς και απότομα την ταχύτητά του και την πορεία του, θα προκύψει μία εμπειρική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που θα φθίνει γρήγορα με το χρόνο. Μια πρόβλεψη με βάση αυτή τη συνάρτηση θα σήμαινε ότι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση από μέτρηση σε μέτρηση είναι πολύ αβέβαιη, πράγμα που πάλι δεν ευσταθεί, αφού το πλοίο μπορεί να κινείται ομαλά για μεγάλο διάστημα.

Παρόμοια προβλήματα θα έχουμε και όταν οι μετρήσεις δεν είναι διαθέσιμες ανά μικρά χρονικά διαστήματα. Βέβαια το πόσο μικρό πρέπει να είναι το Δt είναι άμεσα εξαρτημένο από το είδος της κίνησης που εξετάζουμε κάθε φορά. Ας θεωρήσουμε ότι το πλοίο σε κάποια στιγμή στρίβει διαγράφοντας ένα ημικύκλιο και γυρίζει σε αντίθετη κατεύθυνση. Έστω ότι έχουμε δύο συστήματα εντοπισμού θέσης στο πλοίο. Το ένα παρέχει στη διάρκεια της στροφής πολλές μετρήσεις ενώ το άλλο μόνο τρεις. Αν θελήσουμε να αναλύσουμε τον τρόπο μεταβολής της ταχύτητας από

τις μετρήσεις θα πάρουμε δύο πολύ διαφορετικά αποτελέσματα από τα δύο δείγματα των μετρήσεων. Αυτό με τις πολλές μετρήσεις θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα μιας αρκετά συσχετισμένης χρονικά ταχύτητας, ενώ το άλλο δείγμα σε μία πολύ λίγο συσχετισμένη ταχύτητα. Όμως και τα δύο δείγματα προσπαθούν να εκφράσουν την ίδια πραγματικότητα: το πόσο απότομα μπορεί να στρίψει το πλοίο. Θα έπρεπε λοιπόν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το καθένα να είναι ισοδύναμα, πράγμα που δεν ισχύει.

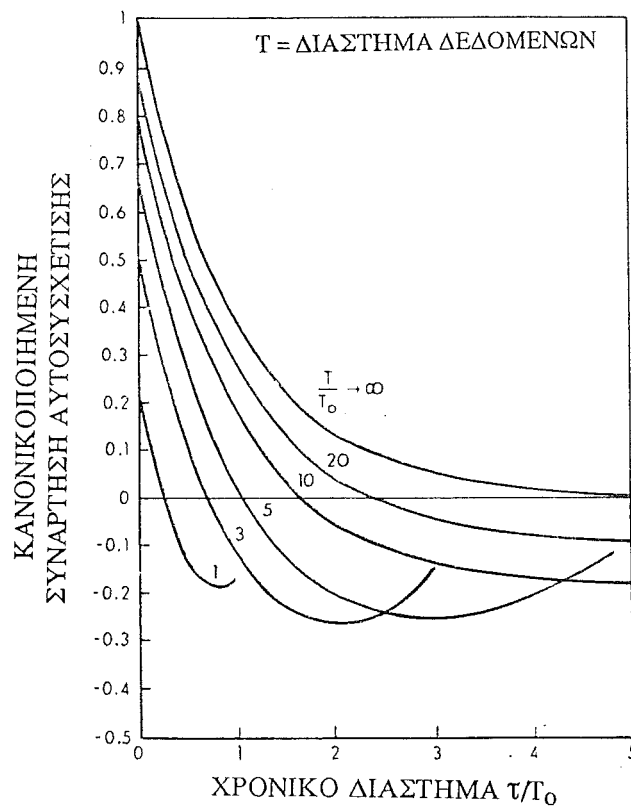
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να εξάγουμε ρεαλιστικά συμπεράσματα από μία συνάρτηση συμμεταβλητότητας πρέπει να πληρούνται δύο βασικές προϋποθέσεις. Πρέπει πρώτα το πλήθος των μετρήσεων του δείγματος των τιμών της στοχαστικής συνάρτησης να είναι αρκετά μεγάλο και κατά δεύτερο λόγο το χρονικό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων αρκετά μικρό. Το ποιές θα είναι αποδεκτές τιμές για το N και το Δt εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουμε. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι οι μετρήσεις που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης πρέπει να περιέχουν πολύ λίγο θόρυβο, διαφορετικά θα υποπέσουμε στο σφάλμα να ερμηνεύσουμε τις διαταραχές που οφείλονται καθαρά στο θόρυβο των μετρήσεων σαν ασθενή χρονική συσχέτιση του μεγέθους που μετράμε.

Για να ελέγξουμε αν η συχνότητα των μετρήσεων είναι κατάλληλη πρέπει να έχουμε κατανοήσει τη φυσική λειτουργία του συστήματος που εξετάζουμε. Αυτό θα βοηθήσει επίσης πολύ και στην αναγνώριση του ποσοστού του θορύβου στις μετρήσεις. Όσο αφορά το πλήθος των μετρήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε, πρέπει να επιδιώκουμε να ισχύει:

$$\frac{T}{T_0} \rightarrow \infty \quad (3-65)$$

όπου T είναι ο συνολικός χρόνος που καλύπτουν οι μετρήσεις και T_0 ο χρόνος συσχέτισης. Εύκολα όμως γίνεται αντιληπτό ότι κάτι τέτοιο αποτελεί μία καθαρά θεωρητική επιδίωξη. Στην πράξη αν αυτός ο λόγος είναι παραπάνω από δέκα, θεωρείται ικανοποιητικό για πολλές περιπτώσεις. Το σχήμα 3.2 δείχνει για διάφορες τιμές του λόγου T/T_0 , τη διαφορά της αντίστοιχης συνάρτησης από τη συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη που εκφράζει η σχέση (3-65). Ο κατακόρυφος άξονας αντιπροσωπεύει τις αναμενόμενες τιμές της κανονικοποιημένης συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $\frac{E[\varphi_{xx}(\tau)]}{\sigma^2}$ και ο οριζόντιος τον κανονικοποιημένο χρόνο $\frac{\tau}{T_0}$.

Μέχρι εδώ είδαμε ότι η διαφοροποίηση της εφαρμογής του φίλτρου Kalman για πλοία με διαφορετική δυναμική γίνεται με τη βοήθεια του μήκους συσχέτισης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Έχοντας εξετάσει επίσης τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται αυτό το μήκος, μπορούμε τώρα να δώσουμε συνοπτικά τη μορφή των διαφόρων μοντέλων του φίλτρου.



Σχήμα 3.2 Κανονικοποιημένη αναμενόμενη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για διάφορα δειγματικά μήκη.

3.3.7 Μοντέλο σταθερής ταχύτητας

Στο μοντέλο αυτό έχουμε ως παρατηρήσεις τις γεωδαιτικές συντεταγμένες του πλοίου, όπως αυτές προσδιορίζονται από το δέκτη. Σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων αυτών είναι το WGS 84. Το διάνυσμα των παρατηρήσεων είναι της μορφής:

$$\mathbf{z} = [\varphi \ \lambda \ h]^T \quad (3-66)$$

Τα μεγέθη που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι οι φιλτραρισμένες τιμές για τις συνιστώσες της θέσης και της ταχύτητας. Το διάνυσμα των αγνώστων είναι της μορφής:

$$\mathbf{x} = [\varphi \ \lambda \ h \ v_\varphi \ v_\lambda \ v_h]^T \quad (3-67)$$

Θεωρώντας δεδομένο ότι η ταχύτητα εκφράζεται από μία εκθετική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, είναι γνωστό ότι η διακριτή της μορφή δίνεται από τη σχέση (3-62). Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας μετάβασης είναι (Schwarz et al., 1988):

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha_{\varphi}t}}{\alpha_{\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha_{\lambda}t}}{\alpha_{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha_{h}t}}{\alpha_{h}} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha_{\varphi}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha_{\lambda}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha_{h}t} \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

Στο επόμενο υποκεφάλαιο, που ασχολείται αναλυτικά με το μοντέλο σταθερής ταχύτητας, θα δοθεί και μία απλούστερη μορφή για τον πίνακα μετάβασης, που προκύπτει από την εφαρμογή των σχέσεων που περιγράφουν την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (βλ. σχέσεις 3-3). Με τη σύγκριση των δύο πινάκων αρχίζει να γίνεται περισσότερο κατανοητή η σημασία της αντιμετώπισης του προβλήματος με τη βοήθεια των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης.

Ο πίνακας σχεδιασμού του μοντέλου των μετρήσεων (σχέση 3-34) είναι:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του θορύβου του συστήματος, δηλαδή ο πίνακας που αντιστοιχεί στην ποσότητα $\Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T$ της σχέσης (3-33), δίνεται συναρτήσει του μήκους συσχέτισης και των φασματικών πυκνοτήτων του θορύβου q από τη σχέση (3-28) (Λιαπάκης, 1991, Huep, 1986):

$$\mathbf{C}^w = \begin{bmatrix} c_{22}q_{\varphi} & 0 & 0 & c_{23}q_{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}q_{\lambda} & 0 & 0 & c_{23}q_{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & c_{22}q_h & 0 & 0 & c_{23}q_h \\ c_{32}q_{\varphi} & 0 & 0 & c_{33}q_{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & c_{32}q_{\lambda} & 0 & 0 & c_{33}q_{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & c_{32}q_h & 0 & 0 & c_{33}q_h \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

όπου:

$$c_{22} = \frac{-3 + 2\alpha_i \Delta t + 4e^{-\alpha_i \Delta t} - e^{-2\alpha_i \Delta t}}{2\alpha_i^3}$$

$$c_{23} = c_{32} = \frac{1 - 2e^{-\alpha_i \Delta t} + e^{-2\alpha_i \Delta t}}{2\alpha_i^2}$$

$$c_{33} = \frac{1 - e^{-2\alpha_i \Delta t}}{2\alpha_i}$$

$i = \varphi$ για την πρώτη και τέταρτη γραμμή του πίνακα, λ για την δεύτερη και πέμπτη και h για την τέταρτη και έκτη. Το q δίνεται από τη σχέση (3-61).

Ο πίνακας \mathbf{R}_k της σχέσης (3-46) που χρησιμεύει για τον υπολογισμό του πίνακα κέρδους \mathbf{K}_k , είναι ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του πίνακα σχεδιασμού της σχέσης (3-69), ο \mathbf{R}_k είναι διαγώνιος και περιέχει τις μεταβλητότητες των συντεταγμένων που προσδιορίζει ο δέκτης. Εδώ προκύπτει το ερώτημα αν η θεώρηση μηδενικών συμμεταβλητοτήτων μεταξύ των συντεταγμένων οδηγεί σε μείωση της ακρίβειας του αλγορίθμου του φίλτρου. Αυτό εξαρτάται από το πόσο συσχετισμένες είναι οι συνιστώσες θέσης που υπολογίζονται από το δέκτη. Μια διερεύνηση του ζητήματος αυτού θα γίνει στο τέταρτο κεφάλαιο. Ο τρόπος πάντως για να εισάγουμε στο φίλτρο και τις συμμεταβλητότητες που αναφέραμε, είναι να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο προσδιορισμού διανύσματος θέσης που αναπτύχθηκε στο υποκεφάλαιο (2.3). και να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του δέκτη και ολόκληρο τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων τους $\mathbf{Q}_{\varphi\varphi}$.

3.3.8 Εισαγωγή της επίδρασης της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων στο φίλτρο

Όπως αναπτύχθηκε στο υποκεφάλαιο (2.2), η ακρίβεια στον προσδιορισμό θέσης εξαρτάται εκτός από την ακρίβεια στη μέτρηση των ψευδοαποστάσεων ή φάσεων και από τη γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων. Αν λοιπόν θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο φίλτρο την επίδραση της γεωμετρίας, πρέπει να εισάγουμε στον πίνακα \mathbf{R}_k της σχέσης (3-45) εκτός από την αβεβαιότητα των μετρήσεων και τις ποσότητες DOP (βλ. σχέση 2-7).

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση εξαρτάται από το αν παρατηρούμε τον κώδικα C/A, τον κώδικα P ή φάσεις των φερουσών συχνοτήτων. Γενικά θεωρούμε ότι η ακρίβεια με την οποία μπορεί να γίνει η μέτρηση των παραπάνω μεγεθών ισούται με το ένα εκατοστό του αντίστοιχου μήκους κύματος. Γνωρίζοντας τις συχνότητες των κωδίκων και των φερουσών συχνοτήτων, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη κύματος.

Οι ακρίβειες στη μέτρηση προκύπτει τελικά ότι είναι 3m, 30cm και 2mm, αντίστοιχα για τον C/A, τον P και την L2.

Τα μεγέθη DOP είναι δυνατό είτε να υπολογιστούν εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του υποκεφαλαίου (2.3), είτε να ληφθούν άμεσα από το δέκτη. Ο δέκτης όμως δεν εμφανίζει αυτά τα μεγέθη στην οθόνη, αλλά τα αποθηκεύει σε κάποιο από τα αρχεία που δημιουργεί κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του. Έτσι πρέπει να υπάρχει τρόπος άμεσης επικοινωνίας με τα αρχεία του δέκτη, ώστε τα DOP να είναι γνωστά για κάθε στιγμή παρατήρησης.

3.3.9 Μοντέλο σταθερής επιτάχυνσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το μοντέλο αυτό λαμβάνει υπόψη του στην πρόβλεψη και κάποια επιτάχυνση του σκάφους. Για τη σωστή του εφαρμογή απαιτούνται παρατηρήσεις και για τις συνιστώσες της ταχύτητας του πλοίου, εκτός από τις παρατηρήσεις για τη θέση. Αν λοιπόν οι μετρήσεις προέρχονται μόνο από το σύστημα GPS, πρέπει να διαθέτουμε δέκτη που να μετρά και ακτινικές ταχύτητες. Το διάνυσμα των παρατηρήσεων είναι της μορφής:

$$\mathbf{z} = [\varphi \ \lambda \ h \ v_\varphi \ v_\lambda \ v_h]^T \quad (3-71)$$

Τα μεγέθη που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι οι φιλτραρισμένες τιμές για τις συνιστώσες της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Το διάνυσμα των αγνώστων είναι της μορφής:

$$\mathbf{x} = [\varphi \ \lambda \ h \ v_\varphi \ v_\lambda \ v_h \ a_\varphi \ a_\lambda \ a_h]^T \quad (3-72)$$

Ο πίνακας μετάβασης είναι αντίστοιχα:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}t & \frac{e^{-\beta_i t} + \beta_i t - 1}{\beta_i^2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \frac{1 - e^{-\beta_i t}}{\beta_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & e^{-\beta_i t} \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

όπου β_i τα μήκη συσχέτισης για την επιτάχυνση και $i = \varphi$ για τις γραμμές 1,4,7, λ για τις 2,5,8 και h για τις 3,6,9. Οι υποπίνακες \mathbf{I} , $\mathbf{0}$ έχουν διάσταση 3x3 και είναι αντίστοιχα ο μοναδιαίος και ο μηδενικός.

Ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του θορύβου του συστήματος, υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο μοντέλο σταθερής ταχύτητας. Η μορφή του είναι:

$$C^w = \begin{bmatrix} Ic_{11}q_i & Ic_{12}q_i & Ic_{13}q_i \\ Ic_{21}q_i & Ic_{22}q_i & Ic_{23}q_i \\ Ic_{31}q_i & Ic_{32}q_i & Ic_{33}q_i \end{bmatrix} \quad (3-74)$$

όπου ο I μοναδιαίος πίνακας 3×3 , τα c_{22} , c_{23} , c_{32} και c_{33} ορίστηκαν στη σχέση (3-70) και:

$$c_{11} = \frac{1 + 2\beta_i \Delta t - 2\beta_i^2 \Delta t^2 + \frac{2}{3} \beta_i^3 \Delta t^3 - 4\beta_i \Delta t e^{-\beta_i \Delta t} - e^{-2\beta_i \Delta t}}{2\beta_i^5}$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{1 - 2\beta_i \Delta t + \beta_i^2 \Delta t^2 + 2\beta_i \Delta t e^{-\beta_i \Delta t} - 2e^{-\beta_i \Delta t} + e^{-2\beta_i \Delta t}}{2\beta_i^4}$$

$$c_{13} = c_{31} = \frac{1 - 2\beta_i \Delta t e^{-\beta_i \Delta t} - e^{-2\beta_i \Delta t}}{2\beta_i^3}$$

Ο τρόπος για να εισάγουμε στο μοντέλο της σταθερής επιτάχυνσης την επίδραση της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων είναι απόλυτα όμοιος με την περίπτωση του μοντέλου σταθερής ταχύτητας.

3.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Μέχρι τώρα είδαμε συνοπτικά το τρόπο με τον οποίο εφαρμόζονται τα μοντέλα σταθερής ταχύτητας και επιτάχυνσης. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει μία πιο εκτεταμένη παρουσίαση του πρώτου μοντέλου και θα διερευνηθεί και η περίπτωση του φίλτρου, κατά την οποία δε λαμβάνονται υπόψη τα μήκη συσχέτισης.

Για την εφαρμογή του φίλτρου οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι κοινές και για τα δύο μοντέλα. Οι εξισώσεις αυτές έχουν δοθεί στο υποκεφάλαιο 3.2, όπως προκύπτουν από τη θεωρητική ανάλυση του φίλτρου Kalman. Συνοπτικά σε μορφή αλγορίθμου είναι:

$$x_k (-) = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} + w_{k-1} \quad (3-75)$$

$$P_k (-) = \Phi_{k-1} P_{k-1} (+) \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (3-76)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (3-77)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k(-) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k(-) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (3-78)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \mathbf{K}_k [z_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-)] \quad (3-79)$$

$$\mathbf{P}_k(+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k(-) \quad (3-80)$$

Η σχέση (3-75) δίνει το μαθηματικό μοντέλο στο οποίο βασίζεται η πρόβλεψη. Για την εφαρμογή της χρειάζεται η γνώση του πίνακα μετάβασης και του διανύσματος κατάστασης της προηγούμενης στιγμής. Ο θόρυβος στη σχέση μετάβασης δε συμμετέχει στον υπολογισμό της πρόβλεψης, καθώς έχει στοχαστικό χαρακτήρα. Για την εφαρμογή του φίλτρου πρέπει να θέσουμε στην εξίσωση (3-75) για τη διακριτή στιγμή μετά την πρώτη μέτρηση (στιγμή 1), όπου $\hat{\mathbf{x}}_0$ το διάνυσμα κατάστασης που παρέχουν οι μετρήσεις, αφού εκτίμηση για τη στιγμή 0 δε μπορούμε να έχουμε. Το ίδιο ζήτημα έχουμε να αντιμετωπίσουμε και στη σχέση (3-76) όπου πάλι ο πίνακας $\mathbf{P}_0(+)$ είναι άγνωστος. Στη θέση του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των μετρήσεων της στιγμής 0. Μετά από λίγες επαναλήψεις του αλγόριθμου αυτή η προσέγγιση χάνει εντελώς την επίδρασή της στην ακρίβεια των υπολογισμών. Ένας τρόπος για να μειωθεί ο αριθμός αυτών των επαναλήψεων είναι να τεθούν στη θέση του $\mathbf{P}_0(+)$ οι τιμές των μεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων μειωμένες ελαφρά κατ' εκτίμηση. Η λογική γι' αυτό είναι ότι οι μεταβλητότητες των τελικών εκτιμήσεων του διανύσματος κατάστασης είναι μικρότερες απ' αυτές των μετρήσεων· αυτός είναι εξάλλου και ο σκοπός της εφαρμογής του φίλτρου. Το πόσο χρειάζεται να μειωθούν οι παραπάνω τιμές εξαρτάται από το μοντέλο που χρησιμοποιούμε και από τις παραμέτρους του φίλτρου. Στη σχέση (3-76) που δίνει τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων της πρόβλεψης λαμβάνεται υπόψη ο θόρυβος w_{k-1} της σχέσης μετάβασης (βλ. υποκεφάλαιο 3.1.1).

Η διαδικασία της πρόβλεψης για κάποια χρονική στιγμή έχει τελειώσει χωρίς να είναι διαθέσιμες οι μετρήσεις για την ίδια στιγμή. Οι μετρήσεις σχετίζονται με το διάνυσμα κατάστασης μέσω της σχέσης (3-77). Ο πίνακας θορύβου των μετρήσεων \mathbf{R}_k χρησιμοποιείται αμέσως μετά στην εξίσωση (3-78) για τον υπολογισμό του πίνακα κέρδους. Στην γενική περίπτωση ο \mathbf{R}_k είναι διαφορετικός από αυτόν των παρατηρούμενων μεγεθών. Αυτό συμβαίνει, γιατί γενικά τα παρατηρούμενα μεγέθη δεν ταυτίζονται με τα στοιχεία του διανύσματος κατάστασης, όπως όταν παρατηρούμε ψευδοαποστάσεις, ενώ το διάνυσμα κατάστασης περιέχει τις συντεταγμένες θέσης και ταχύτητας. Στην ειδική περίπτωση όπου σαν παρατηρήσεις θεωρούνται απ' ευθείας οι συντεταγμένες θέσης, τότε ο \mathbf{R}_k περιλαμβάνει τις μεταβλητότητες και συμμεταβλητότητες των συντεταγμένων. Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα κέρδους υπολογίζουμε την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης και τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων του. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή για κάθε επόμενη χρονική στιγμή.

Ενδιαφέρον έχει να δούμε πώς εφαρμόζονται οι σχέσεις (3-16) και (3-18), οι οποίες δίνουν τον πίνακα μετάβασης και τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης

που ικανοποιεί η κίνηση του πλοίου. Ας θεωρήσουμε ένα πλοίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μία ευθεία. Η κίνησή του διαταράσσεται από μικρές τυχαίες δυνάμεις, που προκαλούν εκτροπές του πλοίου από την ευθεία της πορείας του και συνεπώς κάποιες επιταχύνσεις. Θεωρώντας ότι το πλοίο κινείται σε μία περιορισμένη περιοχή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται πάνω σε ένα επίπεδο. Έτσι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= 0 \cdot E(t) + \dot{E}(t) + 0 \cdot N(t) + 0 \cdot \dot{N}(t) \\ \ddot{E}(t) &= 0 \cdot E(t) + 0 \cdot \dot{E}(t) + 0 \cdot N(t) + 0 \cdot \dot{N}(t) + w_E(t) \\ \dot{N}(t) &= 0 \cdot E(t) + 0 \cdot \dot{E}(t) + 0 \cdot N(t) + \dot{N}(t) \\ \ddot{N}(t) &= 0 \cdot E(t) + 0 \cdot \dot{E}(t) + 0 \cdot N(t) + 0 \cdot \dot{N}(t) + w_N(t)\end{aligned}\tag{3-81}$$

όπου $E(t)$ και $N(t)$ οι προβολικές συντεταγμένες της θέσης του πλοίου και $w_E(t)$, $w_N(t)$ επιταχύνσεις στοχαστικού χαρακτήρα στις δύο διευθύνσεις αντίστοιχα.

Το διάνυσμα κατάστασης έχει τη μορφή:

$$\mathbf{x}(t) = [E(t) \quad \dot{E}(t) \quad N(t) \quad \dot{N}(t)]^T$$

Οι σχέσεις (3-81) σε μορφή πινάκων γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{E}(t) \\ \ddot{E}(t) \\ \dot{N}(t) \\ \ddot{N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(t) \\ \dot{E}(t) \\ N(t) \\ \dot{N}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_E(t) \\ w_N(t) \end{bmatrix}\tag{3-82}$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)\tag{3-83}$$

Η τελευταία σχέση αντιπροσωπεύει τη διαφορική εξίσωση της κίνησης του πλοίου και ταυτίζεται με την εξίσωση (3-11), όταν δεν υπάρχει ντετερμινιστικός έλεγχος της κίνησης. Η προϋπόθεση αυτή σημαίνει πως εκτός από τη σταθερή ώθηση που παρέχουν οι μηχανές για την ευθύγραμμη κίνηση, δε γίνεται καμιά άλλη επέμβαση, όπως αυξομείωση της ταχύτητας ή διόρθωση πορείας. Αυτό φαίνεται στην αρχή εντελώς αντιρεαλιστικό, καθώς αστάθμητοι παράγοντες, όπως κύματα, άνεμος και θαλάσσια ρεύματα, αναγκάζουν τον καπετάνιο να επεμβαίνει διαρκώς

στην κίνηση του πλοίου, ώστε αυτό να διατηρεί πάντα την επιθυμητή πορεία. Η αγνόηση λοιπόν όλων αυτών των επεμβάσεων θέτει ερωτηματικά για την ορθότητα της παραπάνω θεώρησης. Από την άλλη πλευρά και η θεώρηση του λευκού θορύβου δε φαίνεται να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Όλες οι εξωτερικές τυχαίες δυνάμεις που επιδρούν σε ένα πλοίο δε μπορεί παρά να είναι χρονικά συσχετισμένες. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό για την περίπτωση της επίδρασης ενός δυνατού ανέμου που φυσά από σταθερή διεύθυνση. Άρα δηλαδή φαίνεται η αποδοχή της σχέσης (3-83) μαζί με τη θεώρηση λευκού θορύβου να εμπεριέχει δύο σφάλματα.

Μια πιο προσεκτική διερεύνηση του φυσικού προβλήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα δύο παραπάνω σφάλματα έχουν την τάση να αλληλοαναιρούνται. Στην πράξη έχουμε διαρκώς την επίδραση τυχαίων δυνάμεων, που όμως δεν είναι χρονικά ασυσχέτιστες. Εξαιτίας αυτών γίνονται συχνά επεμβάσεις στην πορεία του πλοίου με σκοπό αυτό να κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα. Η ιδανική περίπτωση θα ήταν οι επεμβάσεις που γίνονται κάθε φορά να αντισταθμίζουν ακριβώς τις τυχαίες επιδράσεις. Αυτό όμως δεν είναι πρακτικά εφικτό και έτσι περαμένει πάντα η επίδραση της συνισταμένης του θορύβου και του ελέγχου του συστήματος. Αυτή η συνισταμένη μπορεί να αποτελείται άλλοτε από κάποιο υπόλοιπο μέρος του θορύβου που δεν αντισταθμίστηκε και άλλοτε από κάποιο υπόλοιπο μέρος μιας ανθρώπινης επέμβασης η οποία υπερκάλυψε τις τυχαίες διαταραχές. Η συνιστάμενη λοιπόν επίδραση πλησιάζει αρκετά την παραδοχή του λευκού θορύβου και έτσι η εφαρμογή του μοντέλου της σχέσης (3-83) στηρίζεται σε κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο.

Πρέπει να διευκρινιστεί εδώ ότι ο λευκός θόρυβος, όπως ορίζεται στη θεωρία, πολύ σπάνια αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα. Από πολύ παλιά όμως, πολλές πρακτικές εφαρμογές έχουν δείξει ότι η αποδοχή ασυσχέτιστου χρονικά θορύβου έχει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η θεώρηση λοιπόν του λευκού θορύβου αποτελεί ένα πολυσυζητημένο θεωρητικό πρόβλημα και η παραπέρα διερεύνηση του θέματος ξεφεύγει από το σκοπό της παρούσας εργασίας.

Στη συνέχεια θα δούμε με ποιο τρόπο εφαρμόζοντας τους τύπους (3-16) και (3-22β) προκύπτει από τη σχέση (3-83) η διακριτή μορφή της εξίσωσης κίνησης. Για τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης πρέπει να υπολογιστούν τα γινόμενα \mathbf{F} , \mathbf{F}^2 , \mathbf{F}^3 , ...

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-84)$$

$$\mathbf{F}^3 = \mathbf{F}\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

όμοια προκύπτει ότι $\mathbf{F}^4 = \mathbf{F}^5 = \dots = \mathbf{0}$

Με αντικατάσταση στον τύπο (3-16) προκύπτει:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (t-t_0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3-22β) έχουμε:

$$\Gamma_k \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} t_0 & t_0 & & \\ \int dt & \int (\tau-t_0) d\tau & 0 & 0 \\ t & t & & \\ 0 & \int dt & 0 & 0 \\ & t & & \\ 0 & 0 & t_0 & t_0 \\ & & \int dt & \int (\tau-t_0) d\tau \\ & & t & t \\ 0 & 0 & 0 & \int dt \\ & & & t \\ & & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \Rightarrow$$

$$\Gamma_k \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & 0 \\ t-t_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ 0 & t-t_0 \end{bmatrix} \mathbf{w} \quad (3-86)$$

όπου το \mathbf{w} είναι ανεξάρτητο του χρόνου, όπως αναλύθηκε παραπάνω. Η διακριτή μορφή της εξίσωσης κίνησης παίρνει πια τη μορφή:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & 0 \\ t-t_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ 0 & t-t_0 \end{bmatrix} \mathbf{w}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

4.1 ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία εφαρμογή του φίλτρου Kalman σε πραγματικά δεδομένα μετρήσεων. Σκοπός αυτής της εφαρμογής είναι να γίνει μία διερεύνηση της μορφής και της ποιότητας των πρωτογενών δεδομένων, να αντιμετωπιστούν πρακτικά προβλήματα στην εφαρμογή του αλγόριθμου και κυρίως να αξιολογηθούν τα αποτελέσματά της, ώστε στο τελευταίο κεφάλαιο να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τη χρησιμότητα της θεωρίας του φίλτρου στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων.

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια γεωλογικής μελέτης, για την πόντιση καλωδίου μεταξύ Λαυρίου, Μυκόνου, Χίου και Μυτηλίνης. Στη μελέτη συνεργάστηκαν το Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας και Χαρτογραφίας του ΕΜΠ, το Εθνικό Κέντρο Θαλασσίων Ερευνών (ΕΚΘΕ) και ο ΟΤΕ. Η μελέτη αφορούσε τη σάρωση με Side Scan Sonar μιας ζώνης πλάτους 300 m. Στη ζώνη αυτή είχε προηγηθεί βυθομετρική αποτύπωση και γι' αυτό έπρεπε να ακολουθηθεί με μεγάλη ακρίβεια η ίδια πορεία. Στη βυθομετρική μελέτη το σύστημα εντοπισμού ήταν ένα σύστημα μέτρησης αποστάσεων (MR III), που χρησιμοποιούσε κατευθυνόμενους αναμεταδότες μεγάλων αποστάσεων. Η δυνατότητα αυτή δεν υπήρχε στο Ω/Κ "ΑΙΓΑΙΟ" του ΕΚΘΕ, το οποίο ανέλαβε τη γεωλογική μελέτη και έτσι χρησιμοποιήθηκε για το σκοπό αυτό το σύστημα εντοπισμού GPS.

Τα δεδομένα αντιστοιχούν σε μία χρονική διάρκεια δύο ωρών κατά την οποία το σκάφος πραγματοποιούσε κινήσεις υψηλής δυναμικής κατάστασης. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων είναι κατά μέσο όρο δέκα δευτερόλεπτα. Ο δέκτης GPS ήταν ένας δέκτης ναυσιπλοΐας 4000AX της TRIMBLE NAVIGATION, ο οποίος έχει πέντε κανάλια, χρησιμοποιεί τον κώδικα C/A και επιπλέον έχει τη δυνατότητα μέτρησης ακτινικών ταχυτήτων. Το τελευταίο σημαίνει ότι εκτός από τις τρεις συντεταγμένες θέσης του, προσδιορίζει και τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας του στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Ο δέκτης αυτός είναι υψηλών απαιτήσεων, αφού οι συνηθισμένοι δέκτες ναυσιπλοΐας μετρούν μόνο ψευδοαποστάσεις και έχουν δύο κανάλια. Είναι σημαντικό να σημειωθεί εδώ ότι τα προτερήματα των δεκτών υψηλών απαιτήσεων δε συνίστανται μόνο στην παροχή του διανύσματος ταχύτητας. Ένα επίσης πολύ σημαντικό πλεονέκτημά τους είναι ότι παρέχουν συντεταγμένες θέσης, οι οποίες προέρχονται από μία ομαλοποίηση των αντίστοιχων τιμών που υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων παρατήρησης των ψευδοαποστάσεων. Η ομαλοποίηση αυτή γίνεται με τη βοήθεια των συνιστωσών ταχύτητας, όπως αυτές προκύπτουν από τη μέτρηση των ακτινικών ταχυτήτων.

Αυτό που ενδιαφέρει να εξετάσουμε πριν δούμε την εφαρμογή του φίλτρου στα συγκεκριμένα δεδομένα, είναι κατά πόσο αυτά είναι αξιόπιστα, πόση εσωτερική ακρίβεια έχουν, κατά ποιο βαθμό είναι συσχετισμένα μεταξύ τους και κατά πόσο είναι ομογενή σε διαφορετικές συνθήκες πλεύσης, όπως σε αυξομειώσεις της ταχύτητας και σε στροφές. Η γενική πορεία του πλοίου, που αντιστοιχεί στο διάστημα συλλογής των δεδομένων φαίνεται στο σχήμα (4.1).

Όσο αφορά το πρώτο ζήτημα, στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχει κάποιος τεκμηριωμένος σωστός τρόπος για τη διαπίστωση της εξωτερικής ακρίβειας των μετρήσεων. Όπως είναι γνωστό από τις τοπογραφικές και γεωδαιτικές εργασίες, όταν διαθέτουμε μετρήσεις από ένα μόνο όργανο δε μπορούμε να ελέγξουμε αν αυτές είναι κοντά στις πραγματικές τιμές των μετρούμενων μεγεθών. Κάτι τέτοιο θα ήταν δυνατό μόνο αν διαθέταμε a priori πληροφορία για το παρατηρούμενο μέγεθος ή αν εκτελούσαμε ταυτόχρονα μετρήσεις και με κάποιο άλλο τρόπο, οι οποίες όμως θα έπρεπε να είναι ασυσχέτιστες με τις αρχικές.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ενός πλοίου μία a priori πληροφορία θα μπορούσε να προέλθει προσδιορίζοντας τη θέση της κεραίας του δέκτη, όταν το πλοίο βρίσκεται αραγμένο σ' ένα λιμάνι. Ο προσδιορισμός αυτός θα μπορούσε να γίνει με κλασικές τοπογραφικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα με εμπροσθοτομία από δύο γνωστά σημεία στο έδαφος. Η σύγκριση των θέσεων που προέρχονται από το δέκτη και από τις επίγειες μεθόδους θα έδινε κάποια στοιχεία για το μέτρο της εξωτερικής ακρίβειας του δορυφορικού συστήματος. Βέβαια μία τέτοια μέθοδος δε μπορεί να οδηγήσει στην απομάκρυνση κάποιων συστηματικών σφαλμάτων από το σύστημα εντοπισμού. Με άλλα λόγια αν από τη σύγκριση των παραπάνω τιμών διαπιστωθεί μία απόκλιση των συντεταγμένων του δέκτη από τις αληθινές τιμές, δεν είναι σωστό να θεωρήσουμε ότι αυτή η ίδια απόκλιση θα διατηρηθεί σταθερή στη συνέχεια, όταν το πλοίο αρχίσει να κινείται. Η αιτία γι' αυτό είναι διπλή. Κατά πρώτο λόγο μπορεί αυτή η απόκλιση να είναι συνάρτηση της θέσης του δέκτη και

κατά δεύτερο λόγο μπορεί να είναι και συνάρτηση του χρόνου. Θα μπορούσε δηλαδή να διατηρείται ίδια για τη θέση στο λιμάνι, ενώ όταν το πλοίο αρχίσει να απομακρύνεται από αυτό να διαφοροποιηθεί βαθμιαία. Επίσης είναι δυνατό ο δέκτης να υπολογίζει συνεχώς την ίδια θέση για το σταθερό πλοίο για ένα αρχικό χρονικό διάστημα, μετά την πάροδο του οποίου θα άρχιζε να δίνει διαφορετικές τιμές. Το τελευταίο είναι πολύ σημαντικό για το GPS μετά την εφαρμογή της επιλεκτικής διαθεσιμότητας. Το αποτέλεσμα της είναι ότι το στίγμα που προσδιορίζεται έχει για ένα διάστημα της τάξης της μιας ώρας πολύ μεγαλύτερη τυπική απόκλιση σε σχέση με την αντίστοιχη πριν την ισχύ της επιλεκτικής διαθεσιμότητας. Για μικρότερα διαστήματα όμως της τάξης των μερικών λεπτών, η εσωτερική ακρίβεια των συντεταγμένων είναι μεν μικρότερη απ' ότι παλιότερα, αλλά είναι σημαντικά καλύτερη από την συνολική εσωτερική ακρίβεια της μιας ώρας. Αν λοιπόν χρησιμοποιηθούν οι αποκλίσεις των μερικών λεπτών είναι βέβαιο ότι μέσα σε μία ώρα αυτές θα διαφοροποιηθούν πολλές φορές.

Εξετάζοντας την περίπτωση της ταυτόχρονης χρήσης του GPS και ενός άλλου συστήματος εντοπισμού, πρέπει να σημειωθεί ότι γενικά είναι μία μέθοδος καλύτερη από την προηγούμενη για την εξακρίβωση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων του GPS. Αυτό ισχύει όμως στην περίπτωση που η αξιοπιστία του άλλου συστήματος είναι πολύ καλή.

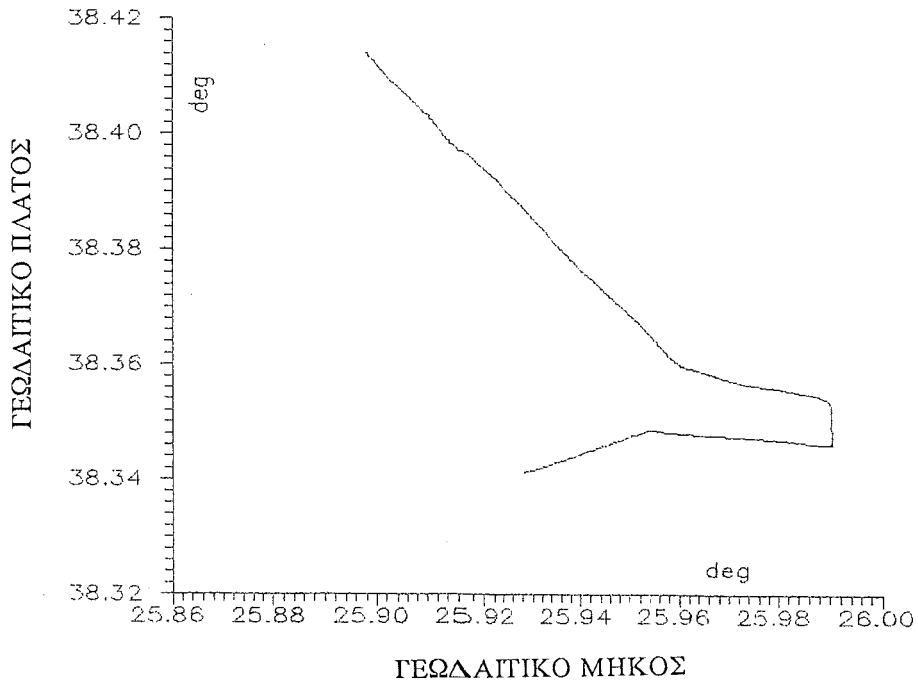
Το μόνο που μπορούμε να πούμε για τα συγκεκριμένα δεδομένα είναι ότι δεν παρατηρούνται ξαφνικές διαφοροποιήσεις στις θέσεις που προσδιορίζει ο δέκτης, οι οποίες θα ήταν βέβαιο ότι δεν αντιστοιχούν σε πραγματικές θέσεις του πλοίου. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η διαφορά των υπολογισμένων θέσεων από τις πραγματικές είτε παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της πλεύσης, είτε μεταβάλλεται με τέτοιο ρυθμό ώστε να δίνει μία πορεία απόλυτα λογική. Γενικά λοιπόν πρέπει να πούμε ότι ο έλεγχος της εξωτερικής ακρίβειας των δεδομένων του GPS είναι μία πολύ λεπτή εργασία που απαιτείται να γίνεται με μεγάλη προσοχή.

Το ίδιο περίπου ισχύει και για τον προσδιορισμό της εσωτερικής ακρίβειας. Το φυσικό πρόβλημα εδώ δεν είναι το πόσο κοντά είναι οι μετρούμενες συντεταγμένες στις πραγματικές, αλλά το πόσο απέχουν μεταξύ τους. Το ζήτημα όμως δεν είναι τόσο απλό, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για μη δυναμικά μεγέθη. Εκεί όλες οι τιμές πρέπει να διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα τους να είναι μικρό. Στην περίπτωση μεγεθών που εξαρτώνται από το χρόνο κάτι τέτοιο δεν έχει νόημα, γιατί εξ ορισμού τα παρατηρούμενα μεγέθη μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Το να πάρουμε λοιπόν τις μετρήσεις που αντιστοιχούν σε μία πορεία του πλοίου και να υπολογίσουμε την τυπική απόκλισή τους ασφαλώς δε μας οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα για την εσωτερική ακρίβεια των παρατηρήσεων. Αντίθετα το μόνο που μπορεί να προκύψει από κάτι τέτοιο είναι το κατά πόσο η συγκεκριμένη πορεία είναι ομαλή ή όχι. Αν σκεφτούμε την περίπτωση ενός πλοίου που κινείται πάνω σε κάποιο μεσημβρινό, μία ανάλυση της παραπάνω μορφής θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων είναι ελάχιστη για το γεωγραφικό μήκος και πολύ μεγαλύτερη για το γεωγραφικό πλάτος. Ο θόρυβος όμως των μετρήσεων με το GPS είναι ως γνωστό της ίδιας τάξης και για τις

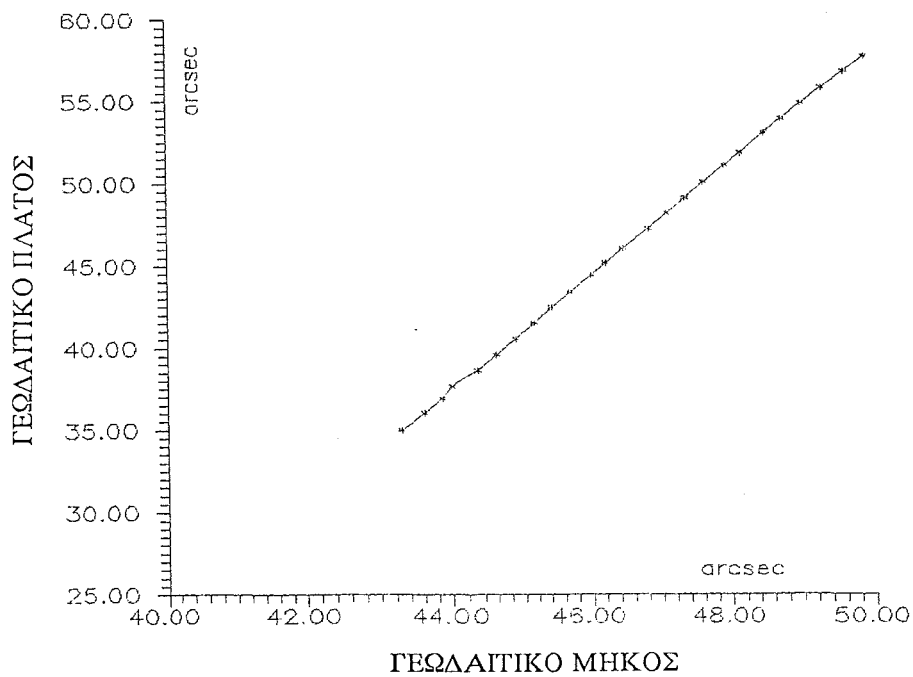
δύο συνιστώσες της οριζόντιας θέσης. Άρα η παραπάνω ανάλυση δεδομένων οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα. Εδώ όμως προκύπτει το ερώτημα του ποια είναι η φυσική σημασία της μεταβλητότητας του μετρούμενου μήκους. Μια αρχική σκέψη είναι ότι εκφράζει το θόρυβο των μετρήσεων, γιατί αφού το πλοίο κινείται συνεχώς στο μεσημβρινό θα πρέπει οποιαδήποτε απόκλιση των παρατηρήσεων από το σταθερό μήκος του μεσημβρινού να οφείλεται στην ύπαρξη θορύβου. Κατά μεγάλο μέρος της αυτή η σκέψη είναι σωστή. Πρέπει όμως να προσεχθούν κάποια σημεία. Πρώτα είναι σαφές ότι σε φυσιολογικές συνθήκες το πλοίο πολύ δύσκολα μπορεί να κινείται έστω και για μικρό διάστημα πάνω σε ένα συγκεκριμένο μεσημβρινό. Εξάλλου και αυτό να επιτευχθεί, ο δέκτης που τοποθετείται συνήθως πάνω στο κατάρτι του πλοίου, θα συμμετέχει στην κίνηση του καταρτιού λόγω κυμάτων. Άρα λοιπόν η συμμεταβλητότητα για το μήκος θα είναι μεγαλύτερη από αυτή των μετρήσεων. Το πόσο θα διαφέρουν οι μετρήσεις εξαρτάται από το πόσο αληθινές είναι οι δύο παραπάνω παραδοχές. Αυτή η διερεύνηση μπορεί να έχει πρακτική σημασία αν το πλοίο πραγματοποιήσει μία πορεία που να προσεγγίζει την ιδανική και στη συνέχεια αφαιρεθεί κατ' εκτίμηση κάποιο μέρος της τυπικής απόκλισης, το οποίο θα αντιστοιχεί στους εξωτερικούς παράγοντες. Κάτι που είναι πιο εύκολα πραγματοποιήσιμο από την κίνηση πάνω σε μεσημβρινό, είναι να διαγράψει το πλοίο μία ευθεία πορεία τυχαίας διεύθυνσης χωρίς να υπάρχει κυματισμός στη θάλασσα και να υπολογιστεί με τη MET η βέλτιστα προσαρμοζόμενη ευθεία. Ο πίνακας μεταβλητοτήτων συμμεταβλητοτήτων των σφαλμάτων θα αντιπροσωπεύει αρκετά καλά το θόρυβο των μετρήσεων.

Μια αρχική εκτίμηση για το μέγεθος του θορύβου των μετρήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια μπορούμε να έχουμε από το σχήμα 4.2, στο οποίο δίνεται μία λεπτομέρεια της πορείας του πλοίου, όταν αυτό κινείται σε ευθεία. Όπως φαίνεται στο σχήμα η πορεία που δίνουν οι μετρήσεις είναι εξαιρετικά ομαλή και η ελάχιστη απόκλιση της από μία ευθεία μπορεί να δικαιολογηθεί απόλυτα από την επίδραση των κυματισμών. Αυτή η επίδραση έχει σαν αποτέλεσμα τόσο την παρέκκλιση του πλοίου από την πορεία του, όσο και την κίνηση του καταρτιού, στο οποίο βρίσκεται η κεραία του δέκτη. Το ότι οι θέσεις που αντιστοιχούν στις μετρήσεις δεν απέχουν σταθερή απόσταση μεταξύ τους, οφείλεται στο γεγονός ότι η χρονική απόσταση των μετρήσεων δεν είναι σταθερή. Η τόσο καλή ποιότητα των μετρήσεων συντεταγμένων οριζόντιας θέσης οφείλεται κατά πολύ μεγάλο μέρος στην ομαλοποίηση των τιμών που κάνει ο ίδιος ο δέκτης, η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως.

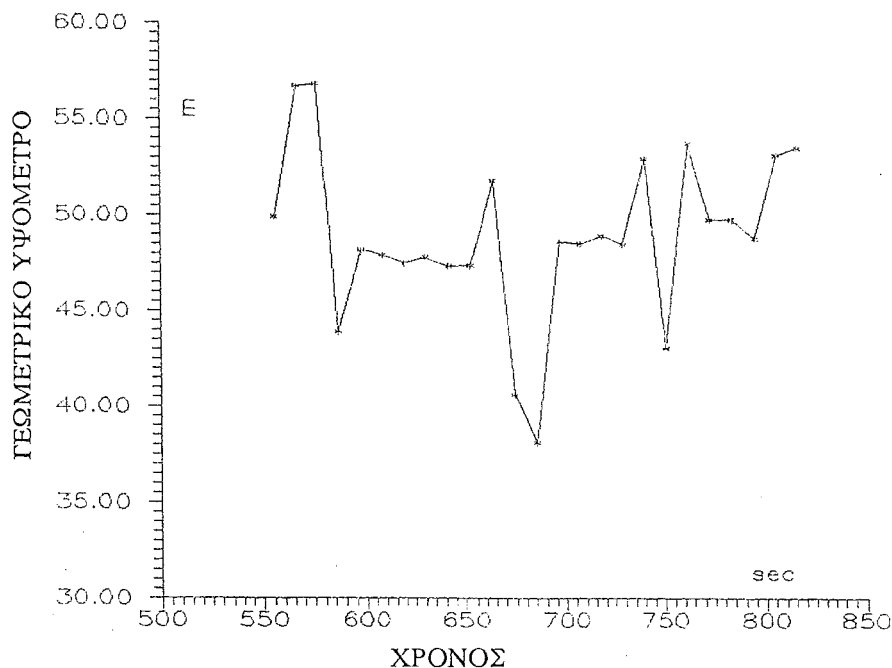
Από το ίδιο σχήμα συμπεραίνεται και αυτό που διευκρινίστηκε παραπάνω, ότι δηλαδή δεν υπάρχουν απότομες μεταβολές στην θέση του πλοίου που να προέρχονται από ανάλογες μεταβολές στην εξωτερική ακρίβεια των μετρήσεων.



Σχήμα 4.1 Η πορεία του πλοίου που αντιστοιχεί στο διάστημα συλλογής των δεδομένων.



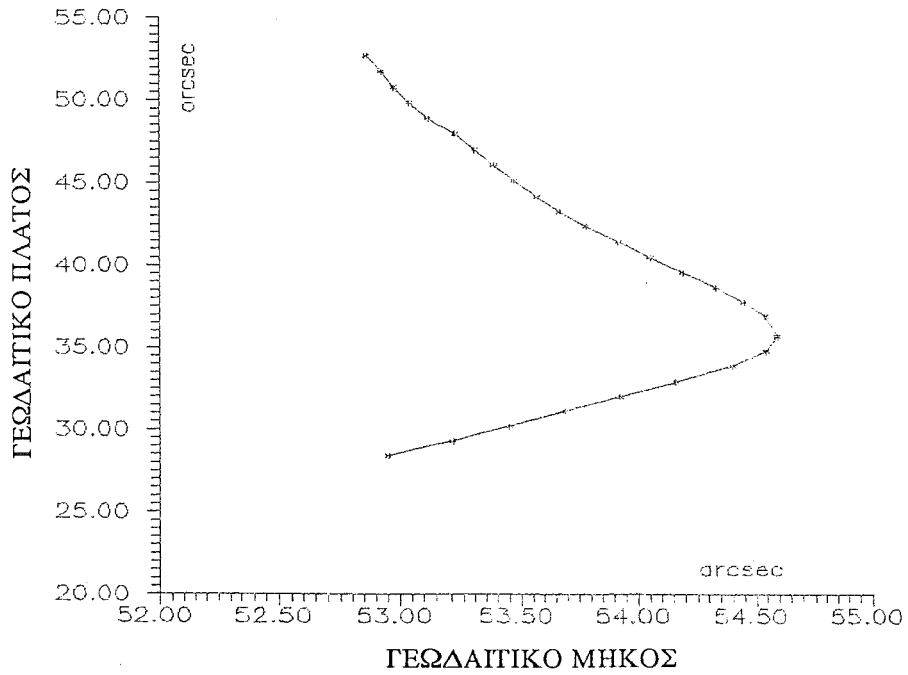
Σχήμα 4.2 Λεπτομέρεια της πορείας του πλοίου, όταν αυτό κινείται σε ευθεία. Οι μονάδες στους άξονες είναι δευτερόλεπτα τόξου και παραλείπεται ο ακέραιος αριθμός μοιρών και πρώτων λεπτών που είναι $38^{\circ} 20'$ για το πλάτος και $25^{\circ} 56'$ για το μήκος.



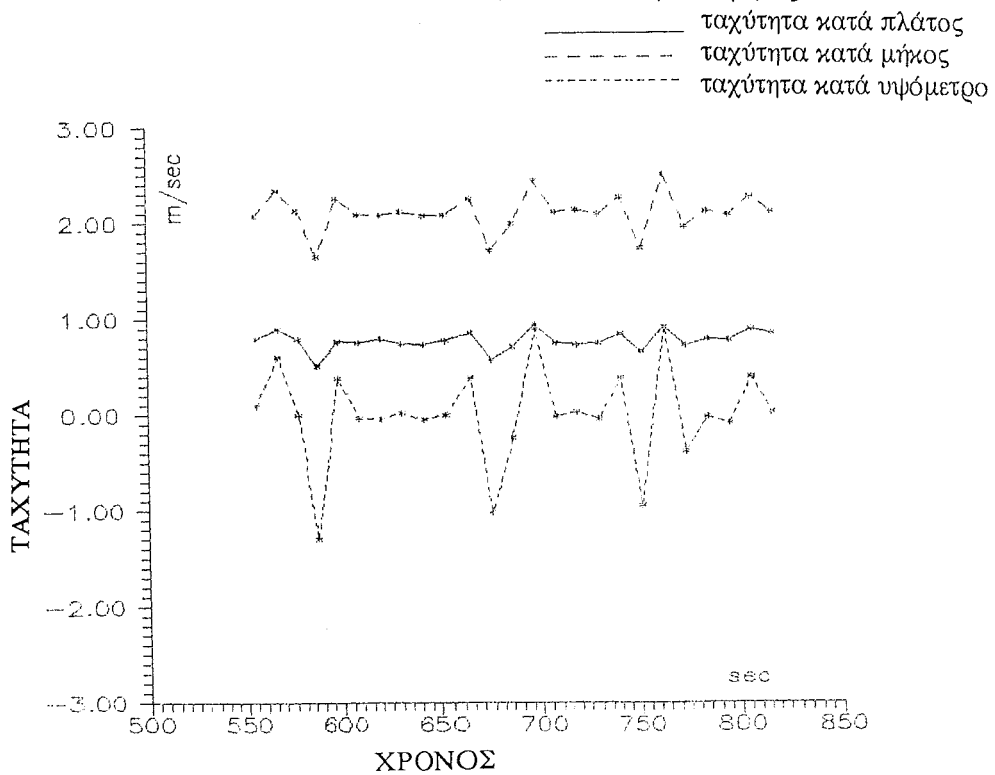
Σχήμα 4.3 Λεπτομέρεια του γεωμετρικού υψομέτρου που προσδιορίζει ο δέκτης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Αν και για την περίπτωση ενός πλοίου συνήθως δεν χρειάζεται η πληροφορία του υψομέτρου, θα εξετάσουμε εδώ και τις μετρήσεις του γεωμετρικού υψομέτρου επειδή σε κάποιες εξειδικευμένες επιστημονικές εργασίες αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο, αλλά και για να έχουμε και μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα των αποτελεσμάτων του δέκτη. Στο σχήμα (4.3) δίνονται οι μετρήσεις για το γεωμετρικό υψόμετρο οι οποίες αντιστοιχούν στο ίδιο χρονικό διάστημα με αυτές του σχήματος (4.2). Με την πρώτη κιόλας ματιά γίνεται αντιληπτό ότι η ποιότητα αυτών των μετρήσεων είναι κατά πολύ χειρότερη από την αντίστοιχη του γεωδαιτικού μήκους και πλάτους. Παρατηρούμε ότι από μέτρηση σε μέτρηση (δηλαδή ανά δέκα δευτερόλεπτα περίπου), το υψόμετρο μεταβάλλεται μέχρι και 13 μέτρα. Αυτό μας οδηγεί με βεβαιότητα στη διαπίστωση ότι οι μετρήσεις αυτές περιέχουν πολύ μεγάλα ποσοστά θορύβου, καθώς αποκλείεται το πλοίο στο οποίο συλλέχθηκαν οι παρατηρήσεις να κινήθηκε πράγματι με αυτό τον τρόπο. Σαν τελικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι οριζοντιογραφικά η θέση του πλοίου προσδιορίζεται με πολύ καλή εσωτερική ακρίβεια, ενώ για το υψόμετρο ισχύει το αντίθετο.

Για να εξετάσουμε αν τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για όλη την πορεία του πλοίου, πρέπει να δούμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για κίνηση πάνω σε στροφή. Στο σχήμα (4.4) δίνεται μία λεπτομέρεια της πορείας του πλοίου όταν αυτό διαγράφει καμπύλη τροχιά. Και σ' αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι αρκετά καλά. Το γεγονός όμως ότι δε μπορούμε να υποθέσουμε ποια ακριβώς ήταν η πραγματική πορεία του πλοίου, μας αναγκάζει να είμαστε λιγότερο βέβαιοι



Σχήμα 4.4 Λεπτομέρεια της πορείας του πλοίου, όταν αυτό διαγράφει κλειστή στροφή. Οι μονάδες στους άξονες είναι δευτερόλεπτα τόξου και παραλείπεται ο ακέραιος αριθμός μοιρών και πρώτων λεπτών που είναι $38^{\circ} 20'$ για το πλάτος και $25^{\circ} 56'$ για το μήκος.



Σχήμα 4.5 Λεπτομέρεια των ταχυτήτων κατά φ.λ.η που προκύπτουν από τις μετρήσεις, για ευθύγραμμη κίνηση.

για το θόρυβο των μετρήσεων στη συγκεκριμένη περίπτωση από ότι στην ευθύγραμμη κίνηση.

Για να εξαντλήσουμε τέλος τη μελέτη της ποιότητας των μετρήσεων, πρέπει να διευκρινίσουμε κατά πόσο οι παρατηρήσεις είναι συσχετισμένες μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο είναι εξαρχής αναμενόμενο καθώς η κεραία του δέκτη συμμετέχει στην κίνηση του καταρτιού. Γι' αυτό το λόγο μία κίνηση της κεραίας εξαιτίας των κυμάτων σε τυχαία διεύθυνση, έχει επίδραση και στις τρεις συνιστώσες της θέσης και πολύ περισσότερο της ταχύτητας. Στο σχήμα (4.5) δίνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος, πλάτος και υψόμετρο, όπως αυτές υπολογίζονται από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του δέκτη. Το χρονικό διάστημα στο οποίο αντιστοιχούν είναι το ίδιο με αυτό των σχημάτων (4.2) και (4.3). Είναι σαφές ότι οι ταχύτητες είναι πολύ έντονα συσχετισμένες μεταξύ τους. Το κατά πόσο η συσχέτιση αυτή οφείλεται στην κίνηση της κεραίας και κατά πόσο προέρχεται από τη λειτουργία του συστήματος είναι κάτι που είναι αδύνατο να απαντηθεί χωρίς να υπάρχει κάποια άλλη πληροφορία για το σύστημα πλοίου-δέκτη. Από την αίσθηση πάντως της λειτουργίας του συστήματος μπορούμε να πούμε ότι και οι δύο παραπάνω παράγοντες συνεισφέρουν στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Κλείνοντας το κεφάλαιο διερεύνησης της ποιότητας των δεδομένων μπορούμε να πούμε ότι το πλάτος και μήκος προσδιορίζονται με πολύ καλή εσωτερική ακρίβεια τόσο στην ευθύγραμμη κίνηση όσο και στις στροφές. Οι τιμές του υψομέτρου είναι αντίθετα ιδιαίτερα αναξιόπιστες, πράγμα που τους στερεί κάθε πρακτική χρησιμότητα. Πολύ σημαντική είναι η διαπίστωση της έντονης συσχέτισης των παρατηρήσεων, η οποία προκύπτει από τα διαγράμματα των ταχυτήτων. Η εφαρμογή λοιπόν του φίλτρου Kalman στα συγκεκριμένα δεδομένα έχει ενδιαφέρον περισσότερο για το υψόμετρο και τις ταχύτητες παρά για τις συντεταγμένες οριζόντιας θέσης. Αυτό είναι απόρροια της ομαλοποίησης που κάνει από μόνος του ο δέκτης στις συνιστώσες θέσης. Τέλος καθώς η πορεία του πλοίου στη διάρκεια των δύο ωρών περιέχει αρκετές απότομες στροφές, μπορεί με βάση τις μετρήσεις αυτές να γίνει προσδιορισμός της δυναμικής του συγκεκριμένου σκάφους με υπολογισμό των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης (βλ. υποκεφάλαιο 3.3)

4.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Έχοντας εξετάσει μέχρι εδώ τη μορφή και την ποιότητα των πρωτογενών δεδομένων που διαθέτουμε, μπορούμε να δούμε ποιες είναι τελικά οι ανάγκες που χρειάζεται να καλύψει το φίλτρο Kalman και πως αντιμετωπίζονται τα διάφορα πρακτικά προβλήματα επεξεργασίας των δεδομένων. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω ο δέκτης που συνέλεξε τα δεδομένα παρείχε και τις συνιστώσες ταχύτητας κατά φ,λ,η. Αυτό σημαίνει ότι με τα συγκεκριμένα δεδομένα θα ήταν δυνατή η εφαρμογή ενός μοντέλου σταθερής επιτάχυνσης. Καθώς όμως η ανάπτυξη ενός αντίστοιχου αλγόριθμου ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας, η πα-

ραπέρα εφαρμογή αφορά ένα μοντέλο σταθερής ταχύτητας με παρατηρήσεις συντεταγμένες θέσης. Επίσης γίνεται και εφαρμογή του ίδιου μοντέλου, λαμβάνοντας όμως ταυτόχρονα υπόψη και την επίδραση της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων.

Πριν την περιγραφή του προγράμματος του φίλτρου αξίζει να γίνει μία σύντομη παρουσίαση της διαδικασίας με την οποία υπολογίζονται οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης για τις συνιστώσες της ταχύτητας. Επειδή η συγκεκριμένη εφαρμογή του φίλτρου αφορά ένα μοντέλο σταθερής ταχύτητας με παρατηρήσεις συντεταγμένες θέσης, δεν είναι σωστό να υπολογίσουμε τις παραπάνω συναρτήσεις από τις ταχύτητες που προσδιορίζει ο δέκτης. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να υπολογιστούν οι ταχύτητες από τα στοιχεία του δέκτη, δηλαδή από τις συνιστώσες θέσης.

Πριν αποπειραθούμε οποιαδήποτε τέτοια διαδικασία υπολογισμού, πρέπει να ελέγξουμε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του υποκεφαλαίου (3.3). Ξεκινώντας από το υψόμετρο που προσδιορίζει ο δέκτης, είδαμε στο υποκεφάλαιο (4.1) (σχήμα 4.3) ότι οι αντίστοιχες τιμές περιλαμβάνουν πολύ μεγάλα ποσοστά θορύβου. Αυτό και μόνο είναι αρκετό, για να θεωρήσουμε τα δεδομένα ακατάλληλα για τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της ταχύτητας του υψομέτρου. Το πώς θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό είναι κάτι που θα το δούμε παρακάτω.

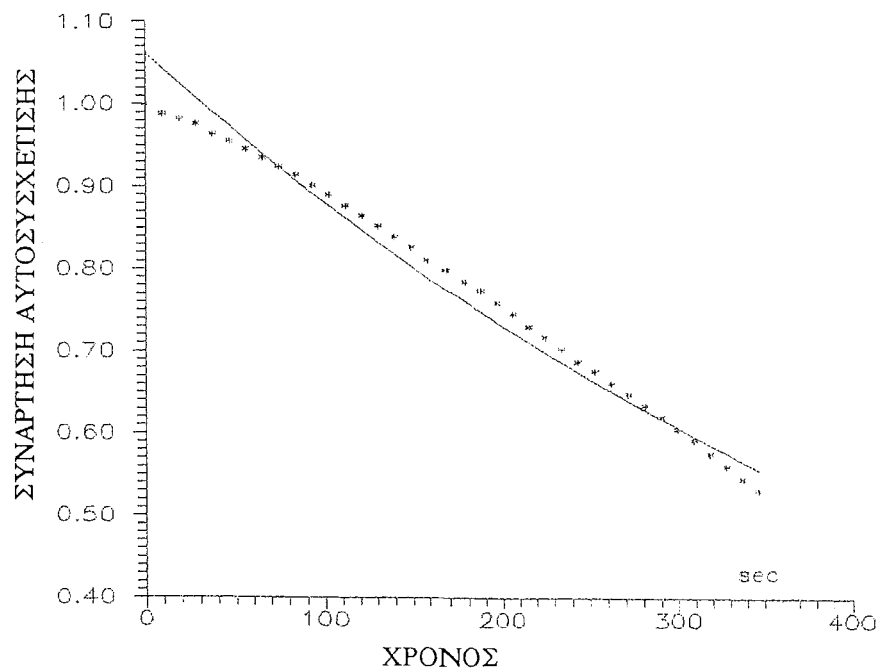
Όσον αφορά τις συντεταγμένες οριζόντιας θέσης είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, ότι αυτές περιέχουν μικρά ποσά θορύβου. Αρκεί να δούμε λοιπόν αν ισχύουν οι άλλες δύο προϋποθέσεις που θα τις καταστήσουν κατάλληλες για υπολογισμό συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης. Η πρώτη, που αφορά το εύρος του χρονικού διαστήματος των δειγματικών τιμών, θεωρούμε ότι ικανοποιείται. Τα δεδομένα καλύπτουν ένα διάστημα περίπου 6000 sec, το οποίο είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το αναμενόμενο μήκος συσχέτισης. Η εμπειρία μέχρι σήμερα έχει δείξει ότι το μήκος συσχέτισης κυμαίνεται από 100 μέχρι και 1500 sec συμπεριλαμβανομένων και των ακραίων περιπτώσεων. Θεωρώντας ως αναμενόμενο μήκος συσχέτισης μία μέση τιμή των δύο παραπάνω, προκύπτει από το σχήμα (3.2) ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο δείγμα τιμών. Επίσης λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση που έγινε στο υποκεφάλαιο (3.3) σχετικά με το χρονικό διάστημα αποχής των μετρήσεων και παρατηρώντας το σχήμα (4.4), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το δείγμα των τιμών που διαθέτουμε για τα φ και λ είναι κατάλληλο για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης των αντίστοιχων ταχυτήτων.

Καθώς με τη βοήθεια των μηκών συσχέτισης προσπαθούμε να δώσουμε την πληροφορία του πόσο εύκολα το πλοίο μπορεί να μεταβάλλει την πορεία του (και συνεπώς τις συνιστώσες της ταχύτητάς του), είναι λογικό να δεχτούμε το ίδιο μήκος συσχέτισης και για τις δύο συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας. Κάτι τέτοιο βέβαια μπορεί να μην προκύπτει από την εφαρμογή των δεδομένων, αλλά αυτό οφείλεται στη μορφή της πορείας που περιγράφουν τα συγκεκριμένα δεδομένα. Δεν έχει καμιά λογική βάση να δώσουμε διαφορετικά μήκη συσχέτισης στις οριζόντιες ταχύτητες, γιατί είναι σα να θεωρούμε ότι η μία ταχύτητα μπορεί να μεταβάλλεται πιο εύκολα από την άλλη. Με βάση αυτό το σκεπτικό ο υπολογισμός του μήκους συσχέτισης γίνεται μόνο για την ταχύτητα κατά μεσημβρινό.

Αρχικά υπολογίζονται οι στιγμιαίες ταχύτητες από τις αντίστοιχες τιμές για το πλάτος. Στη συνέχεια με τη βοήθεια προγράμματος στον ΗΥ υπολογίζονται με χρήση των σχέσεων (3-63) και (3-64) οι δειγματικές τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Είναι αυτονόητο από τη δεύτερη σχέση ότι για να υπάρχει η τιμή x_{i+1} , πρέπει η μέγιστη τιμή του l να είναι μικρότερη ή ίση με $N/2$. Άρα η μέγιστη τιμή του χρόνου για την οποία μπορούμε να έχουμε τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι περίπου 3000 sec. Για μικρές τιμές του l η τιμή της φ_{xx} υπολογίζεται ως μέση τιμή των φ_{xx} που προκύπτουν από όλα τα ζεύγη x_i, x_{i+1} . Καθώς όμως το l μεγαλώνει το πλήθος αυτών των ζευγών που μπορούν να σχηματιστούν μικραίνει. Έτσι όταν το l γίνει ίσο με $N/2$, μόνο ένα ζεύγος x_i, x_{i+1} υπάρχει και η φ_{xx} ($x_{N/2}$) προέρχεται από μία μόνο τιμή και όχι από πολλές, όπως γίνεται για μικρό l . Η μείωση των ζευγών που μπορούν να σχηματιστούν είναι γραμμική σε συνάρτηση με την αύξηση του l . Οι δειγματικές τιμές που προέκυψαν από τα δεδομένα εφαρμογής φαίνονται στο σχήμα (4.6). Σ' αυτό παριστάνονται μόνο οι τιμές που αντιστοιχούν στα πρώτα 350 περίπου δευτερόλεπτα. Γεννιέται λοιπόν το εύλογο ερώτημα γιατί δεν σχεδιάστηκαν όλες όσες μπορούν να υπολογιστούν, δηλαδή για χρόνο μέχρι 3000 sec. Κατά πρώτο λόγο, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως οι τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από 2000 sec προκύπτουν από λίγα ζεύγη τιμών ταχυτήτων. Πέρα όμως από αυτό, όπως συμβαίνει πολύ συχνά στον υπολογισμό των δειγματικών συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και αυτοσυμμεταβλητότητας, μετά από κάποια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής η συνάρτηση εμφανίζει αρνητικές τιμές. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε αυτή η τιμή είναι γύρω στα 900 sec. Οι αρνητικές αυτές τιμές απορρίπτονται καθώς δεν έχει φυσική σημασία να τις αντιστοιχίσουμε με τιμές μεταβλητοτήτων. Άρα είδαμε γιατί δε λαμβάνουμε υπόψη τιμές που αντιστοιχούν σε χρόνο μεγαλύτερο από 900 sec. Ο λόγος για τον οποίο αγνοούμε και τις τιμές από 350 έως 900 sec είναι ότι σε αυτές είναι δύσκολο να προσαρμοστεί ένα εκθετικό μοντέλο. Εξάλλου αφού μας ενδιαφέρει η πρόγνωση των τιμών για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, η παραπάνω απλούστευση όχι μόνο δεν εισάγει σφάλματα στου υπολογισμούς, αλλά είναι και πιο σωστή γιατί με αυτή πετυχαίνεται καλύτερη προσαρμογή της καμπύλης στην αρχή του άξονα του χρόνου, που είναι και η περιοχή που μας ενδιαφέρει για να κάνουμε πρόγνωση τιμών. Στο σχήμα (4.6) δίνονται οι τιμές της κανονικοποιημένης δειγματικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης καθώς και η βέλτιστα προσαρμοζόμενη εκθετική καμπύλη. Η καμπύλη είναι της μορφής της σχέσης (3-59) και υπολογίστηκε με τη MET. Η αναλυτική της έκφραση είναι:

$$\varphi_{xx}(\tau) = 1.101 e^{-0.002\tau} \quad (4-1)$$

Οι συγκεκριμένες δειγματικές τιμές θα μπορούσαν να προσεγγιστούν καλύτερα από ένα γραμμικό μοντέλο παρά από το εκθετικό. Ο λόγος όμως για τη χρησιμοποίηση του δεύτερου είναι ότι αυτό είναι ιδανικό για συναρτήσεις



Σχήμα 4.6 Τιμές δειγματικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για την ταχύτητα κατά μεσημβρινό και βέλτιστα προσαρμοζόμενη εκθετική καμπύλη.

αυτοσυσχέτισης της επιτάχυνσης. Έτσι στην εφαρμογή του μοντέλου σταθερής επιτάχυνσης εξυπηρετεί ιδιαίτερα η αποδοχή του εκθετικού μοντέλου τόσο για την ταχύτητα, όσο και για την επιτάχυνση. Για ένα μοντέλο σταθερής ταχύτητας η παραπάνω προσέγγιση δεν εισάγει σφάλματα, απλά χρησιμοποιεί ένα εκθετικό μοντέλο που εξαιτίας των παραμέτρων του τείνει να εκφυλιστεί σε γραμμικό.

Από όλη την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μήκος συσχέτισης για την ταχύτητα κατά μεσημβρινό είναι 0.002. Την ίδια τιμή θα αποδεχτούμε και για την ταχύτητα κατά παράλληλο. Αυτές λοιπόν οι τιμές αντιπροσωπεύουν την χρονική εξάρτηση των ταχυτήτων του πλοίου για την κίνηση στην οποία αντιστοιχούν τα δεδομένα. Αυτή η κίνηση όμως έγινε όπως ειπώθηκε και παραπάνω, ενώ το πλοίο εξαντλούσε τις δυνατότητες του σε απότομους ελιγμούς. Αν χρησιμοποιηθούν αυτές οι παράμετροι στο φίλτρο και το πλοίο κινηθεί σε συνθησιμένες συνθήκες δυναμικής κατάστασης, τότε η δράση του φίλτρου θα είναι μειωμένη. Αυτό συμβαίνει γιατί η πρόβλεψη για ευθύγραμμη κίνηση γίνεται με περισσότερη αβεβαιότητα έχοντας δώσει μεγάλο μήκος συσχέτισης που αντιστοιχεί σε μικρό χρόνο συσχέτισης. Έτσι οι μετρήσεις συμμετέχουν στη συνόρθωση με μεγάλο σχετικά βάρος, οπότε η επίδραση του φίλτρου μειώνεται. Όταν λοιπόν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το πλοίο θα κινηθεί σχετικά ομαλά, είναι πιο σωστό να θεωρήσουμε μικρότερα μήκη συσχέτισης, ώστε να επιτυγχάνεται ένα πιο ουσιαστικό φιλτράρισμα. Με το σκεπτικό αυτό καταλήγουμε στην αποδοχή της τιμής:

$$\alpha_{\varphi} = \alpha_{\lambda} = 0.001 \quad (4-2)$$

αντί για την προηγούμενη 0.002. Το πόσο αυτή η διαφοροποίηση έχει σημασία θα διερευνηθεί στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Για να κλείσουμε το θέμα για τα μήκη συσχέτισης πρέπει να εξετάσουμε τι γίνεται με την περίπτωση της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του υψομέτρου. Είδαμε ότι εξαιτίας του θορύβου στις μετρήσεις δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που αναπτύχθηκε παραπάνω. Αυτό λοιπόν που μπορούμε να κάνουμε είναι να δώσουμε μία τιμή στο α_h , η οποία να στηρίζεται και στην μέχρι τώρα εμπειρία από την εφαρμογή του φίλτρου Kalman και στο αντίστοιχο μήκος για τις δύο άλλες συνιστώσες της ταχύτητας. Καθώς λοιπόν οι κυματισμοί της θάλασσας αναγκάζουν συχνά ένα πλοίο να μεταβάλλει συνεχώς και απότομα το υψόμετρο στο οποίο κινείται, η ταχύτητά του εναλλάσσεται ανάλογα από θετική σε αρνητική. Η συσχέτιση λοιπόν των ταχυτήτων του υψομέτρου είναι πιο μικρή από την αντίστοιχη των ταχυτήτων της οριζόντιας κίνησης. Τα παραπάνω μας οδηγούν στην επιλογή της τιμής:

$$\alpha_h = 0.003 \quad (4-3)$$

Μετά τα μήκη συσχέτισης ενδιαφέρον έχει να δούμε και κάποιες άλλες ποσότητες που χρειάζονται για την υλοποίηση του αλγόριθμου του μοντέλου σταθερής ταχύτητας. Για την περίπτωση που δε λαμβάνουμε υπόψη τις ποσότητες DOP, ως μεταβλητότητα του θορύβου των μετρήσεων λαμβάνεται η μεταβλητότητα στη μέτρηση της ψευδοαπόστασης με τον κώδικα C/A, που όπως εξηγήθηκε στο υποκεφάλαιο 3.3 είναι:

$$\sigma = \pm 3m \quad (4-4)$$

Όταν διαθέτουμε έναν καλύτερο δέκτη, από τον οποίο μπορούμε να πάρουμε σε αληθή χρόνο τις ποσότητες DOP, τότε η παραπάνω τιμή πολλαπλασιάζεται με αυτές τις ποσότητες. Η τιμή για το υψόμετρο προκύπτει με βάση το VDOP. Για το πλάτος και το μήκος όμως δε διαθέτουμε ξεχωριστές αντίστοιχες τιμές και έτσι θεωρούμε ότι είναι ίσες και τις υπολογίζουμε από το HDOP. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι οι τιμές DOP για το φ ή το λ είναι:

$$\frac{\text{HDOP}}{\sqrt{2}}$$

Οι τιμές του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων της τελικής εκτίμησης για την πρώτη επανάληψη ταυτίζονται για τις συντεταγμένες θέσης με αυτές του αντίστοιχου πίνακα των μετρήσεων. Δεν τέθηκαν άλλες κατ' εκτίμηση μειωμένες τιμές όπως αναπτύχθηκε στο υποκεφάλαιο (3.4), ώστε να φανεί ο αριθμός των επαναλήψεων, μετά τις οποίες η προσέγγιση αυτή χάνει την επίδρασή της στα τε-

λικά αποτελέσματα του φίλτρου.

Με τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων εφαρμόζονται οι τύποι του υποκεφάλαιου (3.3) στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στο υποκεφάλαιο (3.4). Για τον υπολογισμό των φιλτραρισμένων τιμών συντάχθηκε πρόγραμμα στον ΗΥ για την υλοποίηση του αλγορίθμου. Ο υπολογιστής που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένας IBM Risk 6000 (UNIX). Το πρόγραμμα γράφτηκε σε γλώσσα FORTRAN 77 και η ορθότητά του διαπιστώθηκε καθώς τα αποτελέσματα που παρέχει είναι λογικά και επιπλέον ταυτίζονται με τα αντίστοιχα που προσδιορίστηκαν με έναν υπολογιστή "τσέπης".

Η δομή του προγράμματος είναι ερευνητική, που σημαίνει ότι δε σχεδιάστηκε για χρήση στην πράξη σε αληθή χρόνο. Με άλλα λόγια η εισαγωγή δεδομένων στο πρόγραμμα δεν είναι δυναμική αλλά γίνεται για όλο το πλήθος τους στην αρχή. Με τον ίδιο τρόπο εισάγονται και οι ποσότητες DOP. Το μόνο μειονέκτημα της δομής αυτής είναι ότι καταναλώνει πολύ χώρο στη μνήμη του υπολογιστή, καθώς τα δεδομένα καταχωρούνται ως στοιχεία πινάκων με πολύ μεγάλες διαστάσεις. Δεν έγινε προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα πρόγραμμα συνεχούς επικοινωνίας με το δέκτη, αφού δεν υπήρχε η δυνατότητα δοκιμής του σε συνθήκες πραγματικών μετρήσεων. Το πρόγραμμα αποτελείται από το κύριο πρόγραμμα και τις υπορουτίνες. Στο κύριο πρόγραμμα διαβάζονται τα δεδομένα, δίνονται οι τιμές των παραμέτρων και οι αρχικοί πίνακες που χρειάζονται για την πρώτη λύση των εξισώσεων. Στη συνέχεια δίνονται οι τύποι του φίλτρου Kalman, οι οποίοι επαναλαμβάνονται για κάθε στιγμή που παρέχεται μέτρηση και τέλος στέλνονται τα αποτελέσματα στο αντίστοιχο αρχείο. Οι υπορουτίνες του προγράμματος πραγματοποιούν πράξεις μεταξύ πινάκων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός) και αντιστροφή πίνακα. Επειδή το διάνυμα κατάστασης περιέχει γωνιακά μεγέθη που η μεταβολή τους είναι μικρή από μέτρηση σε μέτρηση, το όλο πρόγραμμα κάνει υπολογισμούς χρησιμοποιώντας ακρίβεια 15 δεκαδικών ψηφίων (διπλή ακρίβεια).

4.3 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο υποκεφάλαιο αυτό δίνονται σε μορφή διαγραμμάτων τα αποτελέσματα του προγράμματος που υλοποιεί το μοντέλο σταθερής ταχύτητας του φίλτρου Kalman. Η παράθεση όλων των διαγραμμάτων που μπορούν να προκύψουν από το πρόγραμμα δεν έχει νόημα, καθώς υπάρχει αλληλοκάλυψη μεταξύ των αντίστοιχων συμπερασμάτων. Για παράδειγμα, το φιλτράρισμα που επιτυγχάνεται στην οριζόντια ταχύτητα είναι ουσιαστικά όμοιο και για τις δύο συνιστώσες της, οπότε παρουσιάζεται μόνο το διάγραμμα της μιας από αυτές. Γενικά η ίδια λογική επικρατεί σε όλο το υποκεφάλαιο, προκειμένου αυτό να είναι περιεκτικό και να διευκολύνει τον αναγνώστη.

Στη συνέχεια, όπου δεν αναφέρεται διαφορετικά, οι φιλτραρισμένες τιμές προ-

έρχονται με βάση το μοντέλο που λαμβάνει υπόψη την επίδραση της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων και με τιμές παραμέτρων όπως ορίστηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.

Κάτι που είναι επίσης σημαντικό και αφορά το σύνολο των παρακάτω διαγραμμάτων, είναι ότι η ουσιαστική λειτουργία του φίλτρου αρχίζει μετά την τρίτη-τέταρτη μέτρηση. Αυτό θα φανεί στη συνέχεια και είναι αποτέλεσμα των αρχικών συνθηκών για τον υπολογιστικό αλγόριθμο. Πιο συγκεκριμένα είναι απόρροια των τιμών του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων της πρώτης εκτίμησης που θεωρείται a priori γνωστός. Θα μπορούσε να είχε ακολουθηθεί η διαδικασία του υποκεφαλαίου (3.4) για μείωση του αριθμού αυτών των αρχικών επαναλήψεων, αλλά σκόπιμα δεν έγινε κάτι τέτοιο προκειμένου ναδειχθεί το πόσο λίγες είναι οι αναγκαίες επαναλήψεις.

Ξεκινώντας από τη βασική πληροφορία που ενδιαφέρει στο θαλάσσιο εντοπισμό, δηλαδή την οριζοντιογραφική θέση, το σχήμα (4.7) δίνει την πορεία που παρέχουν οι μετρήσεις και την αντίστοιχη των φιλτραρισμένων τιμών. Επειδή οι αρχικές τιμές είναι ήδη πολύ ομαλές, οι δύο πορείες διαφέρουν πολύ λίγο. Για να φανεί αυτή η διαφορά, στο σχήμα δίνεται ένα μικρότερο χρονικό διάστημα από αυτό του σχήματος (4.2). Στο σχήμα (4.8) δίνεται το γεωδαιτικό πλάτος συναρτήσει του χρόνου, πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου. Γίνεται εμφανές αυτό που είχε τονιστεί και παραπάνω, ότι λόγω της καλής ποιότητας των μετρήσεων οι δυνατότητες του φίλτρου δε μπορούν να αναδειχθούν από τις συντεταγμένες της οριζόντιας θέσης.

Έτσι αυτό που έχει ενδιαφέρον για τα συγκεκριμένα δεδομένα είναι τα αποτελέσματα του φίλτρου στις μετρήσεις του υψόμετρου, οι οποίες περιέχουν μεγάλα ποσοστά θορύβου. Το σχήμα (4.9) δίνει τις μετρήσεις και τις φιλτραρισμένες τιμές για το υψόμετρο. Η μείωση του εύρους διακύμανσης του υψόμετρου είναι μεγάλη. Επίσης η μεταβολή των τιμών είναι πολύ πιο ομαλή από μέτρηση σε μέτρηση.

Τέλος στα σχήματα (4.10), (4.11) και (4.12) δίνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά πλάτος, μήκος και υψόμετρο που αντιστοιχούν στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Εδώ είναι πολύ πιο φανερή η ομαλοποίηση των τιμών που πετυχαίνεται με το φίλτρο. Είναι επίσης αισθητή και για τις οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας, ενώ προηγουμένως για τις οριζόντιες συνιστώσες θέσης ήταν πολύ μικρή.

Για τη διαπίστωση της ομοιογένειας των αποτελεσμάτων του φίλτρου στα διάφορα είδη κίνησης του πλοίου, πρέπει να δούμε τα αντίστοιχα με τα προηγούμενα διαγράμματα για την περίπτωση που το πλοίο κινείται σε στροφή. Στο σχήμα (4.13) δίνεται η καμπύλη πορείας του πλοίου όπως προκύπτει από τις μετρήσεις και από το φίλτρο. Φαίνεται ότι ενώ μέχρι να αρχίσει η στροφή φιλτραρισμένες τιμές και μετρήσεις συμπίπτουν, πάνω στη στροφή υπάρχει μία διαφοροποίηση μεταξύ τους. Συγκεκριμένα οι πρώτες διαγράφουν μία καμπύλη εξωτερική αυτής των μετρήσεων. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο και έχει ιδιαίτερη σημασία για την υποστήριξη της θεωρητικής ορθότητας της χρήσης του φίλτρου σε στροφές. Αναμενόμενο ήταν, γιατί όταν η πρώτη μέτρηση αποκλείει από την ευθεία, η πρόβλεψη για την ίδια στιγμή βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ακολουθούσε το πλοίο

μέχρι τότε. Έτσι η τελική εκτίμηση από το φίλτρο βρίσκεται μεταξύ μέτρησης-πρόβλεψης, δηλαδή αντιστοιχεί σε μία καμπύλη με μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας από αυτή της πορείας των παρατηρήσεων. Το ίδιο ισχύει και για όλα τα σημεία της στροφής, με αποτέλεσμα το φίλτρο να “ακολουθεί” τις μετρήσεις διαγράφοντας μία εξωτερική στροφή. Αυτό ακριβώς το γεγονός, που φαίνεται καθαρά στο σχήμα (4.13), είναι μία ένδειξη του ότι το συγκεκριμένο μοντέλο του φίλτρου δεν μπορεί να δουλέψει ως φίλτρο πάνω σε στροφές. Απλά μπορεί να δίνει αποτελέσματα κοντά στις μετρήσεις, τα οποία μόλις σχεδόν ξαναρχίσει η ευθεία κίνηση αρχίζουν να αποτελούν φιλτραρισμένες τιμές.

Όμως και με τη συγκεκριμένη μορφή του μοντέλου, υπάρχουν δυνατότητες αντιμετώπισης του προβλήματος. Η λύση βρίσκεται στις τιμές των μηκών συσχέτισης, που όπως είναι γνωστό χαρακτηρίζουν το πόσο εύκολα μπορεί να μεταβληθεί η κίνηση του πλοίου. Αν δηλαδή το πρόγραμμα δουλέψει με μήκη συσχέτισης μεγαλύτερα, που σημαίνει πιο ευμετάβλητη πορεία του πλοίου, τότε οι τελικές τιμές θα είναι κατά τη διάρκεια της στροφής πιο κοντά στις μετρήσεις. Για το σχήμα (4.13) έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή $\alpha = 0.001$, όπως εξηγείται στο υποκεφάλαιο (4.2). Το μήκος συσχέτισης όμως που προέκυψε από την ανάλυση της πορείας των δεδομένων ήταν 0.002.

Στο σχήμα (4.14) δίνεται μία λεπτομέρεια της πορείας του σχήματος (4.13) και φαίνονται οι μετρήσεις και οι φιλτραρισμένες τιμές για τα δύο μήκη συσχέτισης. Βλέπουμε ότι αυτή η μικρή διαφοροποίηση στο μήκος συσχέτισης, επηρεάζει πολύ τον τρόπο με τον οποίο το φίλτρο “αντιλαμβάνεται” την καμπυλόγραμμη κίνηση. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να σκεφθεί ότι ρυθμίζοντας ανάλογα το μήκος συσχέτισης μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε επιθυμητό αποτέλεσμα. Αυτό δεν είναι σωστό γιατί όσο μεγαλώνει η τιμή του, τόσο η ομαλοποίηση που επιτυγχάνεται γίνεται μικρότερη. Δίνοντας έτσι μία πολύ μεγάλη τιμή θα καταλήξουν οι φιλτραρισμένες τιμές να ταυτίζονται με τις μετρήσεις. Η σωστή λοιπόν λύση είναι να δοθούν τέτοιες τιμές ώστε και να επιτυγχάνεται ικανοποιητικό φιλτράρισμα και να μην υπάρχει μεγάλη αποχή μετρήσεων-αποτελεσμάτων ιδιαίτερα στις στροφές.

Στο σχήμα (4.15) δίνονται οι ταχύτητες που προκύπτουν από τις μετρήσεις και αυτές του φίλτρου με δύο τιμές για το μήκος συσχέτισης. Φαίνεται και εδώ ότι η ομαλοποίηση που επιτυγχάνεται εξαρτάται από το μήκος συσχέτισης.

Για να γίνει αντιληπτό το πόσο μειώνεται η ομαλοποίηση που επιτυγχάνει το φίλτρο, στο σχήμα (4.16) δίνεται η ταχύτητα που αντιστοιχεί στις μετρήσεις και οι ταχύτητες για τα δύο μήκη συσχέτισης για ευθύγραμμη πορεία του πλοίου.

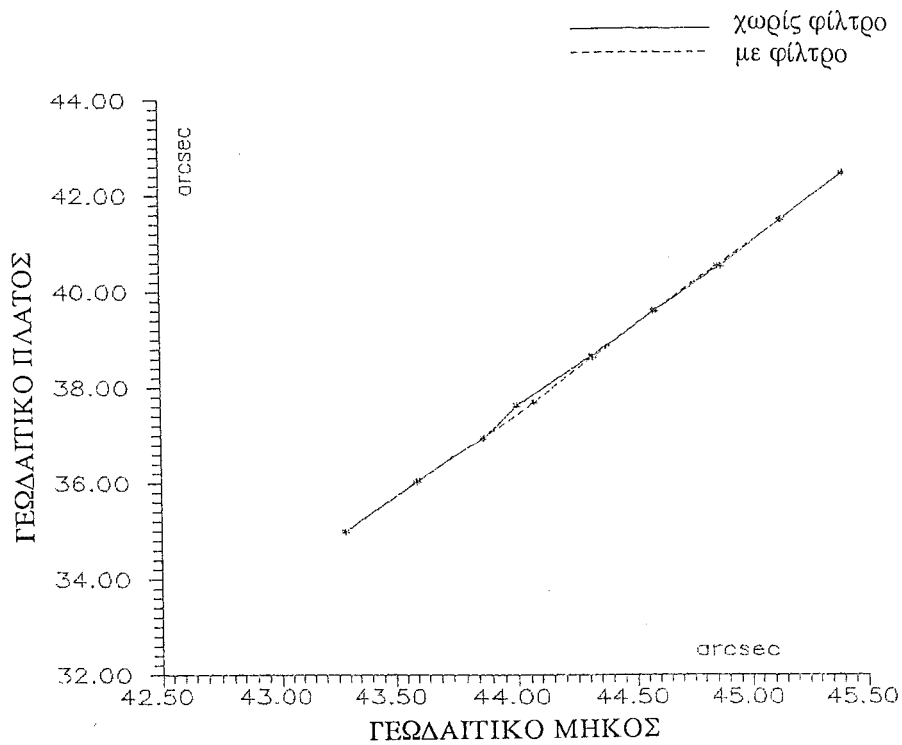
Κάτι που είναι πολύ σημαντικό, είναι να δούμε τη σχέση της τυπικής απόκλισης των μετρήσεων και της αντίστοιχης φιλτραρισμένων τιμών. Στο σχήμα (4.17) δίνεται η μεταβολή της τυπικής απόκλισης συναρτήσει του χρόνου για το πλάτος για ευθύγραμμη κίνηση και για δύο τιμές του μήκους συσχέτισης. Το πρώτο πράγμα που διακρίνει κανείς είναι σημαντική αρχική μείωση της τυπικής απόκλισης των αποτελεσμάτων. Αυτό οφείλεται στις τιμές που δόθηκαν στον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων της εκτίμησης της πρώτης χρονικής στιγμής που θεωρείται a priori γνωστός. Ότι η επίδραση αυτών των τιμών εξασθενεί πολύ γρήγορα είχε

φραίνει και από προηγούμενα διαγράμματα. Το συγκεκριμένο όμως είναι το πλέον ενδεικτικό. Η μείωση λοιπόν της τυπικής απόκλισης είναι αισθητή, αλλά δεν είναι πολύ μεγάλη καθώς οι μετρήσεις είναι εξ αρχής πολύ ομαλές.

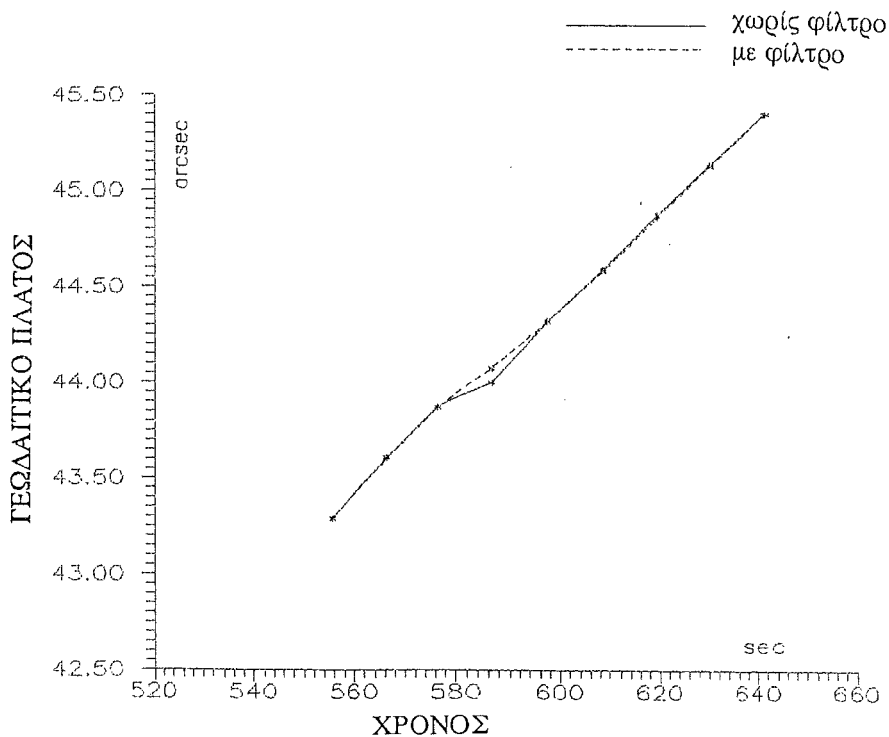
Άρα προκύπτει η ανάγκη να δούμε το ίδιο διάγραμμα για το υψόμετρο. Βέβαια εδώ δεν υπάρχουν δύο παραστάσεις για τα αποτελέσματα καθώς το μήκος συσχέτισης μεταβάλλεται μόνο για την οριζόντια πορεία. Από το σχήμα (4.18) φαίνεται ότι η επίδραση του φίλτρου είναι πολύ πιο έντονη στο υψόμετρο. Αυτό αναμενόταν από την μέχρι τώρα ανάλυση που έχει γίνει και τώρα επιβεβαιώνεται. Παρατηρούμε ότι η τυπική απόκλιση έχει μειωθεί από το φίλτρο στο μισό αυτής των μετρήσεων. Οι απότομες μεταβολές στην τυπική απόκλιση του μετρούμενου υψομέτρου οφείλονται στις διακυμάνσεις της ποσότητας VDOP που προσδιορίζει ο δέκτης.

Αυτό που έμεινε να εξετάσουμε για να κλείσει το υποκεφάλαιο αυτό, είναι η αναγκαιότητα της εισαγωγής στο φίλτρο της επίδρασης της γεωμετρίας του σχηματισμού των δορυφόρων. Μέχρι εδώ όλα τα διαγράμματα προκύπτουν από τη μορφή του προγράμματος που λαμβάνει υπόψη την επίδραση αυτή. Αυτό έγινε γιατί η πλήρης μορφή θεωρείται σωστότερη αφού σ' αυτή οι μεταβλητότητες των μετρήσεων έχουν κατά μεγαλύτερη προσέγγιση τις πραγματικές τους τιμές. Στο σχήμα (4.19) δίνονται οι μετρήσεις της ταχύτητας κατά πλάτος και οι φιλτραρισμένες τιμές χωρίς/και με την εισαγωγή των ποσοτήτων DOP στο πρόγραμμα. Η ομαλοποίηση που πετυχαίνει το φίλτρο, στο οποίο έχει εισαχθεί η γεωμετρία, είναι πολύ ικανοποιητική σε σύγκριση με αυτή στην οποία δε χρησιμοποιήθηκε και η οποία είναι αρκετά μικρότερη.

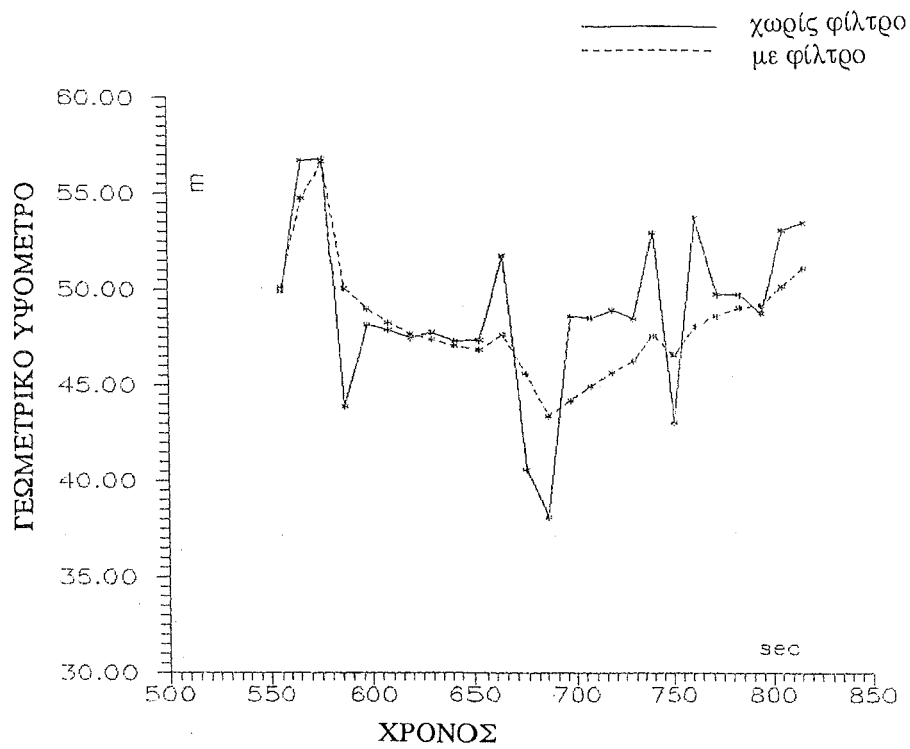
Τα σχήματα (4.20) και (4.21) είναι τα αντίστοιχα του προηγούμενου σχήματος για την ταχύτητα του υψομέτρου και το υψόμετρο. Από τα τρία παραπάνω σχήματα προκύπτει ότι η εισαγωγή των ποσοτήτων DOP είναι σχεδόν απαραίτητη για το υψόμετρο και την ταχύτητα κατά πλάτος. Για την ταχύτητα κατά υψόμετρο η διαφορά είναι αισθητή αλλά μικρότερη μεταξύ των δύο μορφών του φίλτρου. Αυτό είναι λογικό, αφού υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά μεταξύ παρατηρήσεων και αποτελεσμάτων. Έτσι οι σχετικές διαφορές των δύο αποτελεσμάτων δεν είναι έντονες. Πάντως το γενικό συμπέρασμα είναι ότι οι ποσότητες DOP πρέπει να εισάγονται στο φίλτρο.



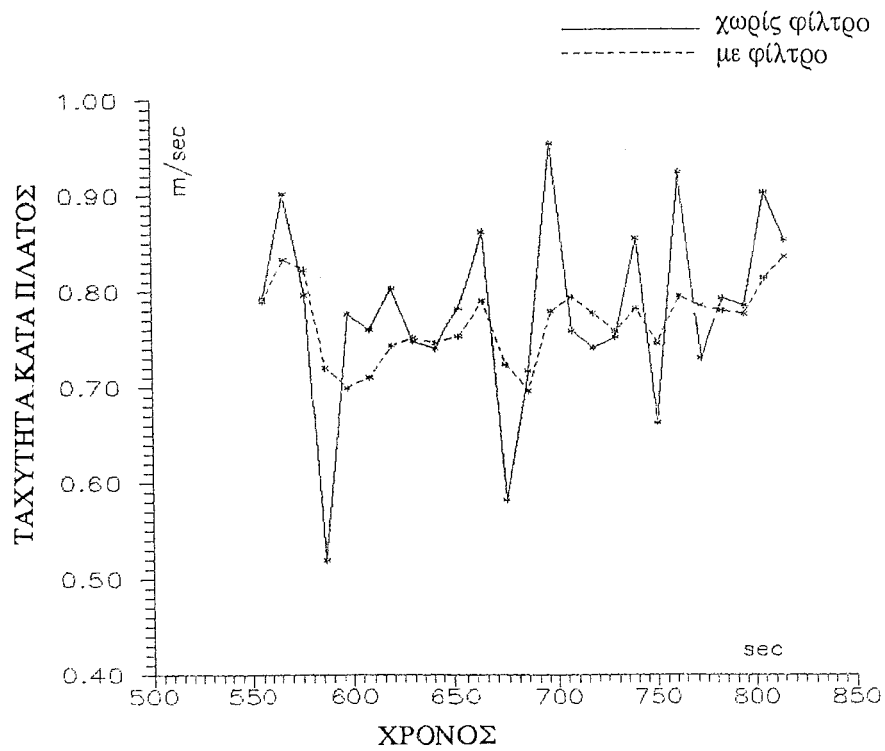
Σχήμα 4.7 Λεπτομέρεια της πορείας του πλοίου, πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου. Οι μονάδες στους άξονες είναι δευτερόλεπτα τόξου και παραλείπεται ο ακέραιος αριθμός μοιρών και πρώτων λεπτών που είναι $38^{\circ} 20'$ για το πλάτος και $25^{\circ} 56'$ για το μήκος.



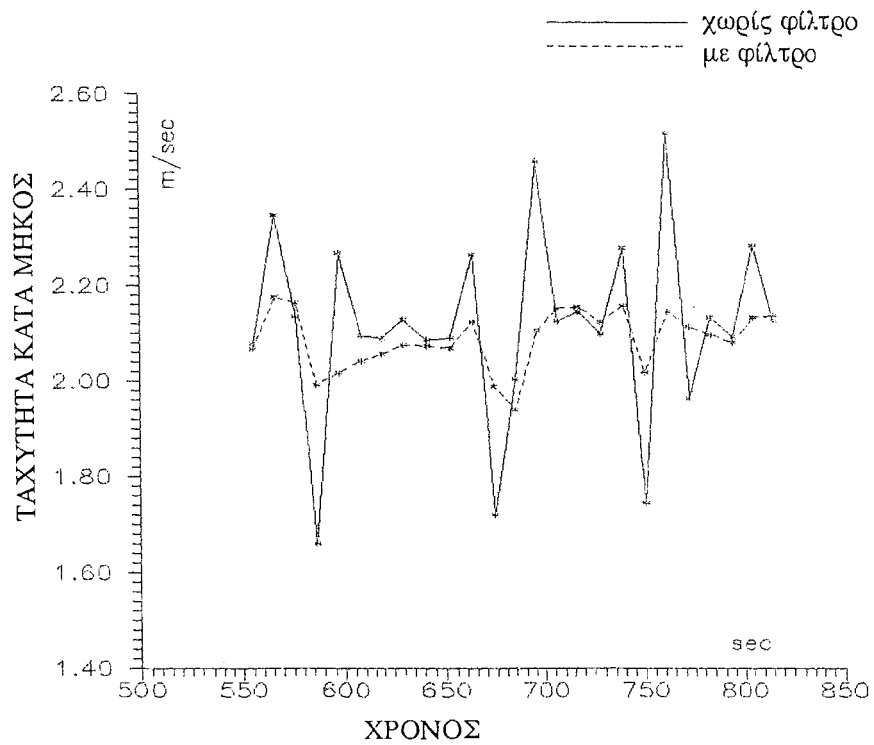
Σχήμα 4.8 Λεπτομέρεια της μεταβολής του γεωδαιτικού πλάτους συναρτήσει του χρόνου, πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου. Οι μονάδες στον κατακόρυφο άξονες είναι δευτερόλεπτα τόξου και παραλείπεται ο ακέραιος αριθμός μοιρών και πρώτων λεπτών που είναι $38^{\circ} 20'$.



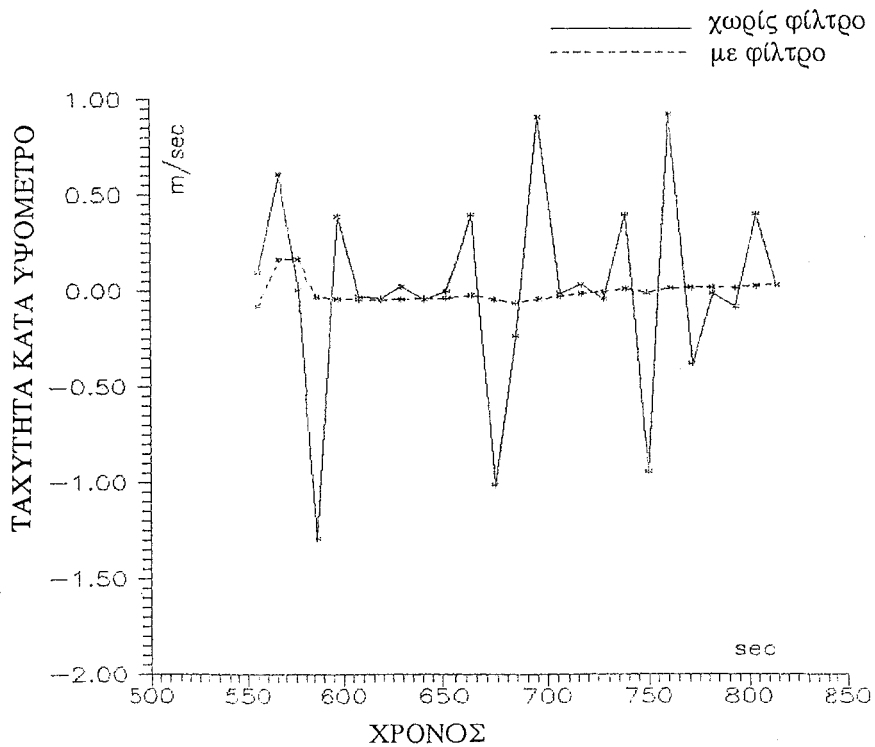
Σχήμα 4.9 Λεπτομέρεια της μεταβολής του γεωμετρικού υψομέτρου πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου.



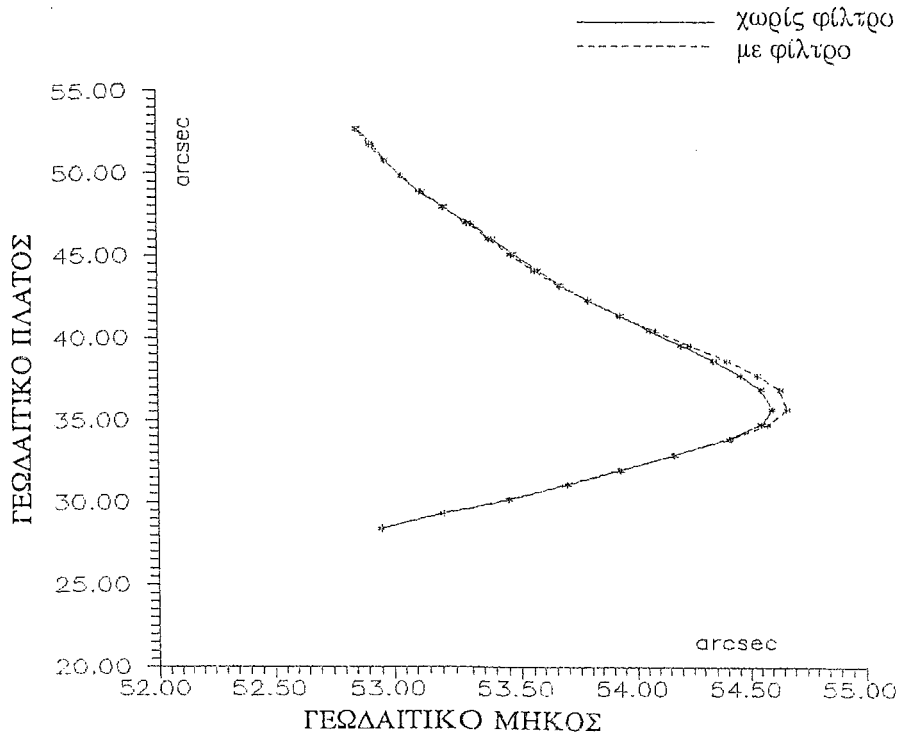
Σχήμα 4.10 Λεπτομέρεια της μεταβολής της ταχύτητας κατά πλάτος πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση.



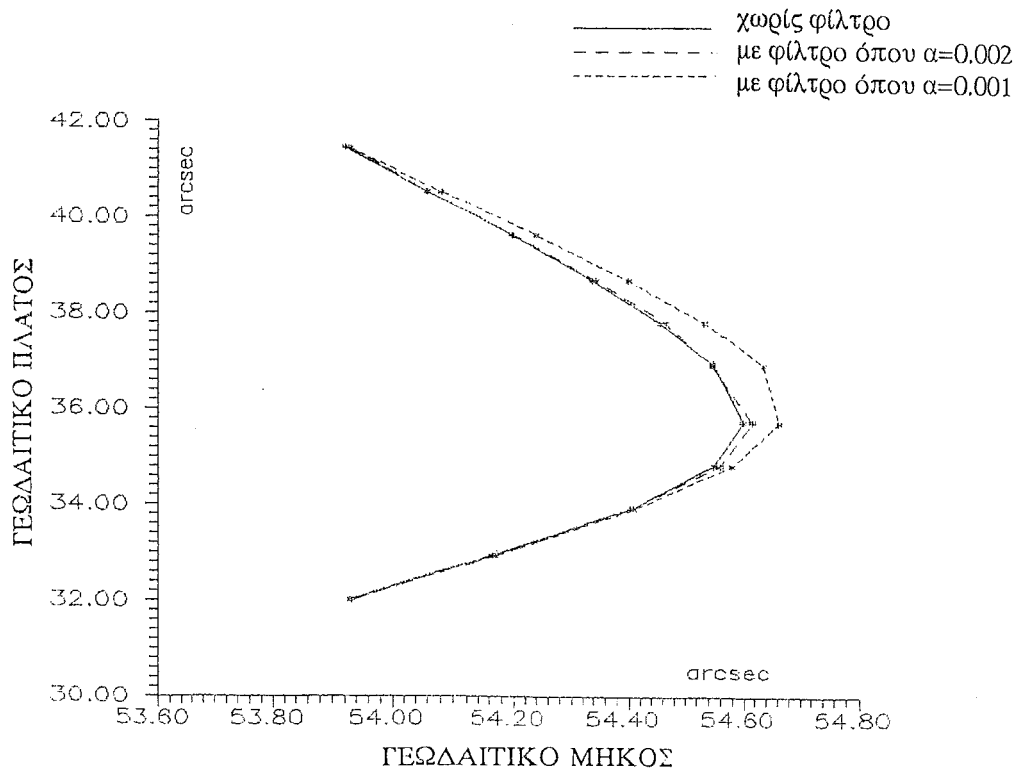
Σχήμα 4.11 Λεπτομέρεια της μεταβολής της ταχύτητας κατά μήκος πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση.



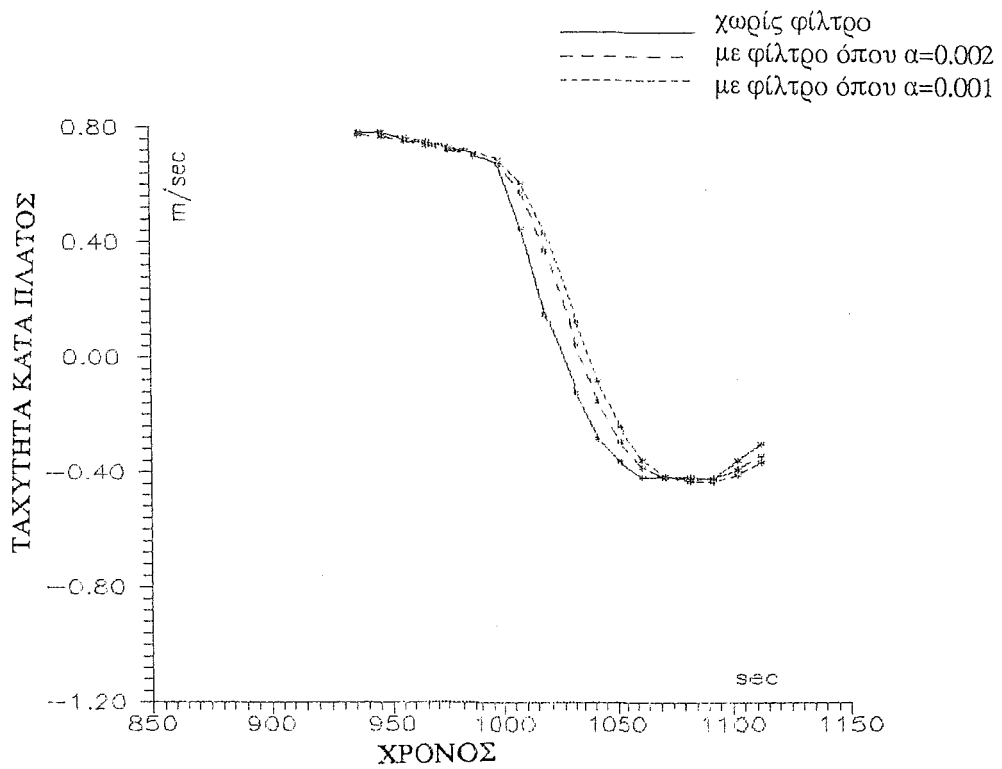
Σχήμα 4.12 Λεπτομέρεια της μεταβολής της ταχύτητας κατά υψόμετρο πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση.



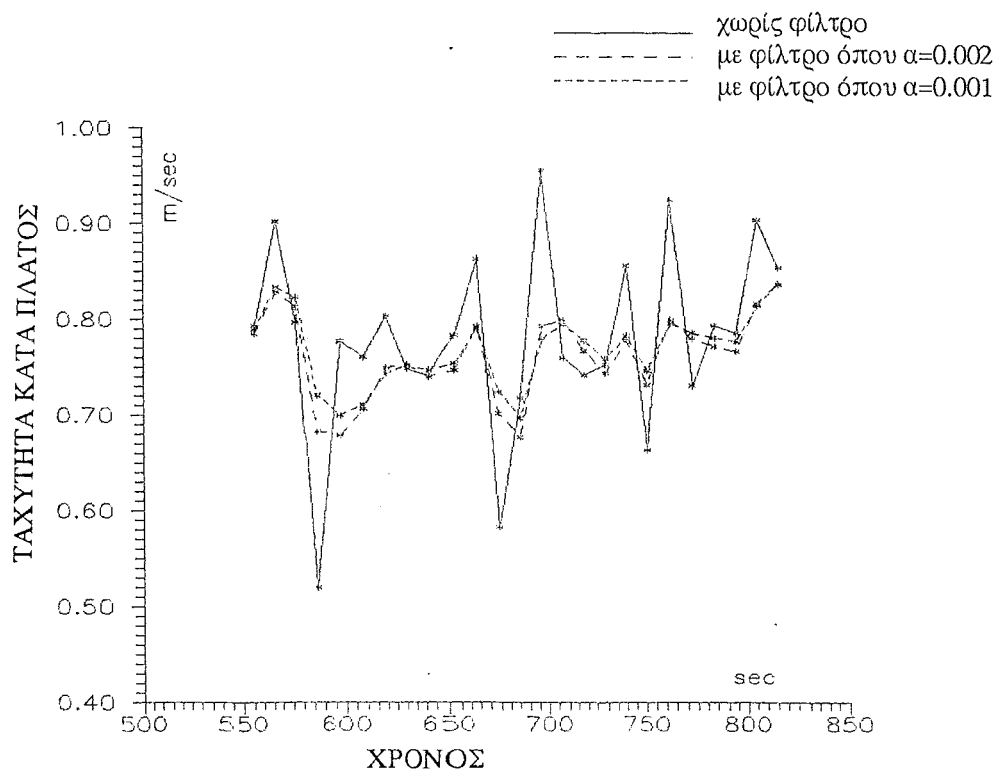
Σχήμα 4.13 Πορεία του πλοίου πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για καμπυλόγραμμη κίνηση.



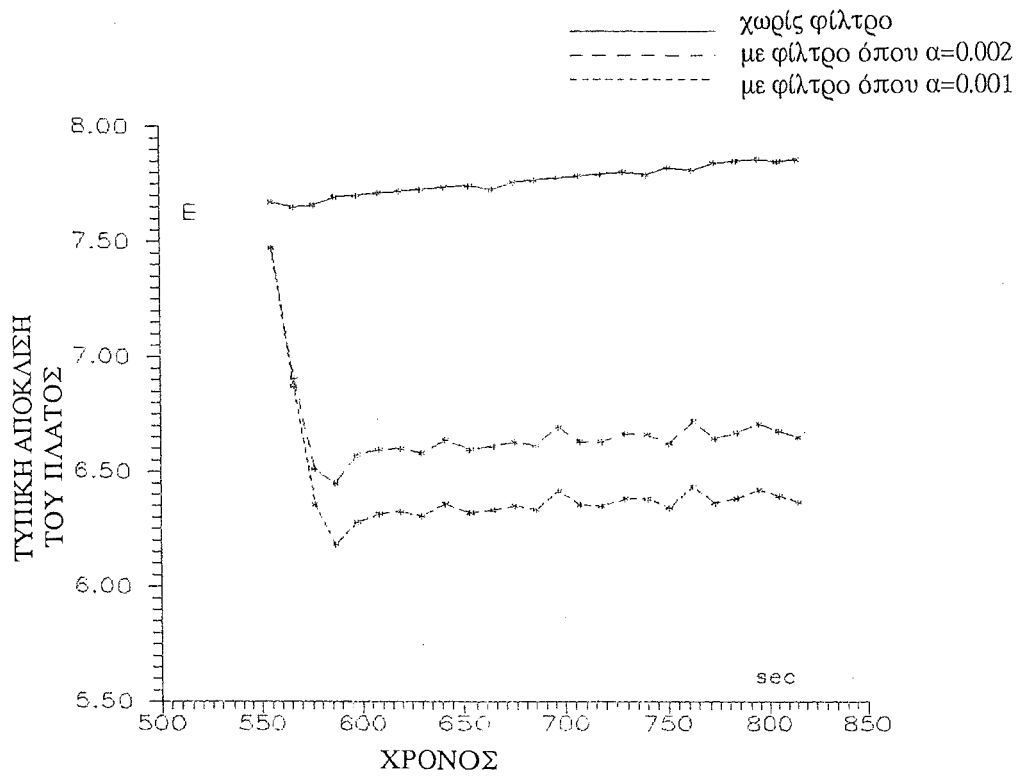
Σχήμα 4.14 Λεπτομέρεια της πορείας πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για καμπυλόγραμμη κίνηση και για δύο διαφορετικά μήκη συσχέτισης.



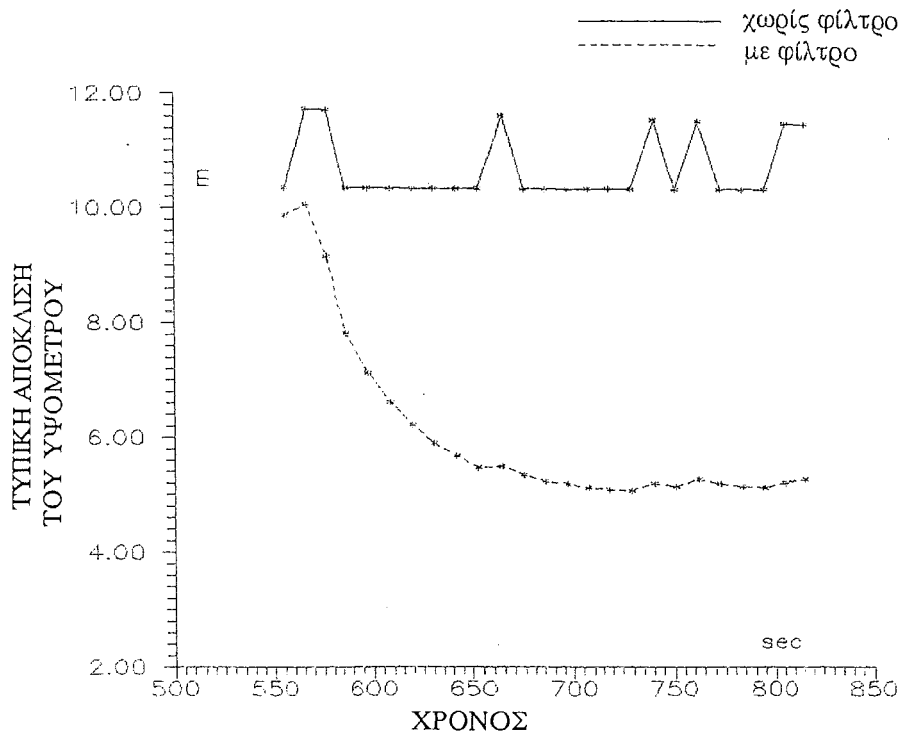
Σχήμα 4.15 Μεταβολή της ταχύτητας κατά πλάτος με το χρόνο πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για καμπυλόγραμμη κίνηση και για δύο διαφορετικά μήκη συσχέτισης.



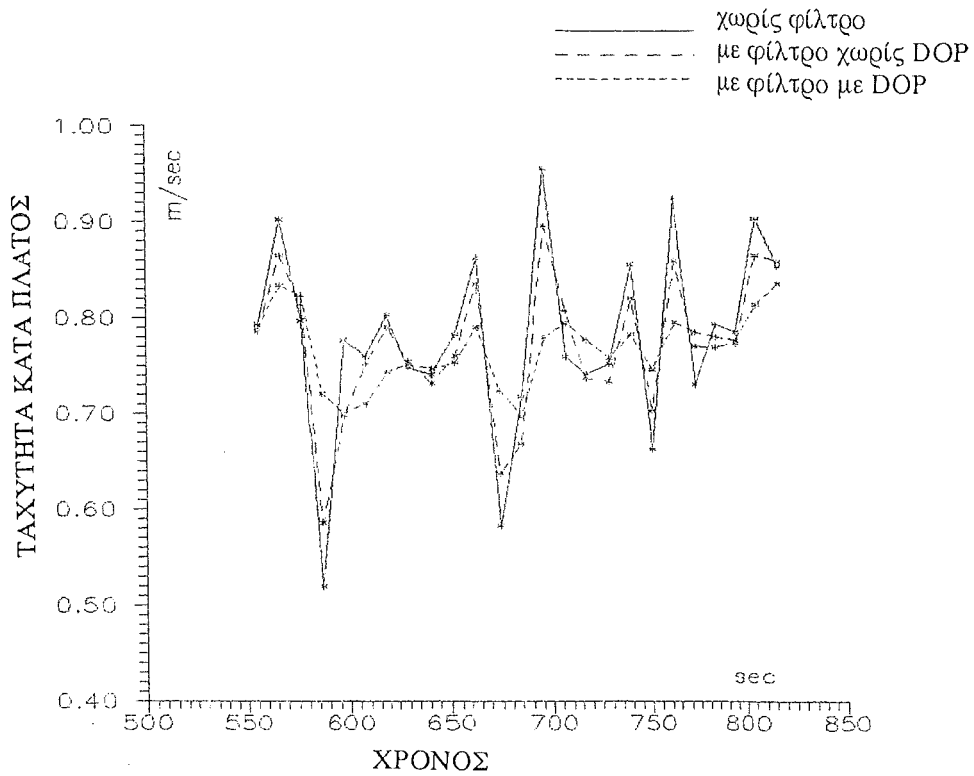
Σχήμα 4.16 Μεταβολή της ταχύτητας κατά πλάτος με το χρόνο πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση και για δύο διαφορετικά μήκη συσχέτισης.



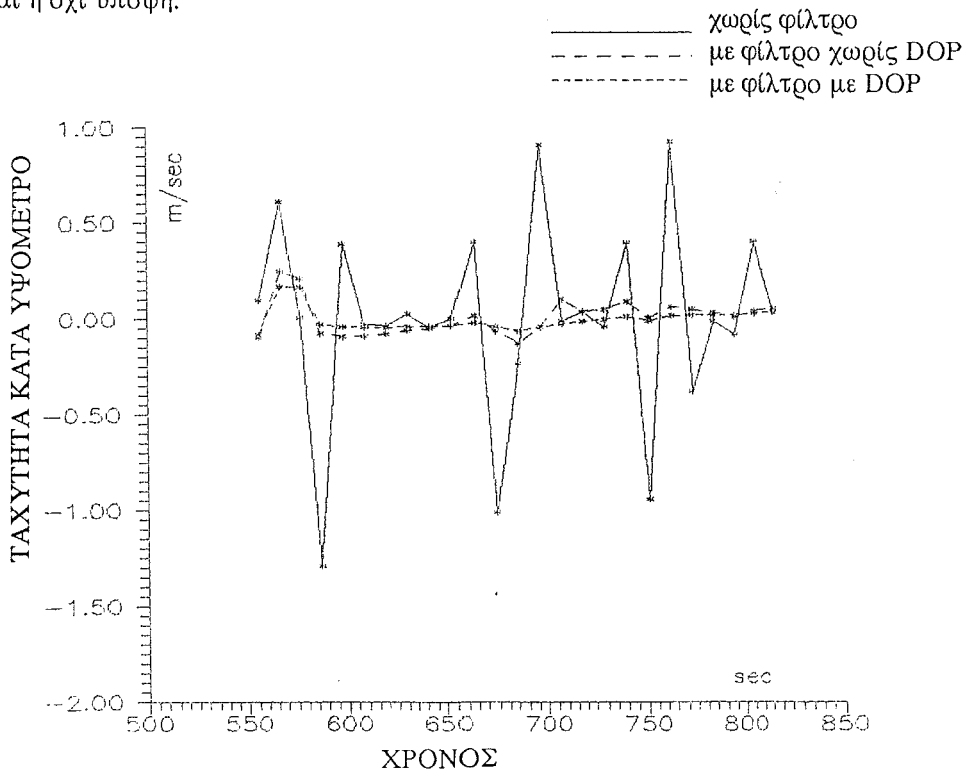
Σχήμα 4.17 Τυπική απόκλιση του πλάτους πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση και για δύο διαφορετικά μήκη συσχέτισης.



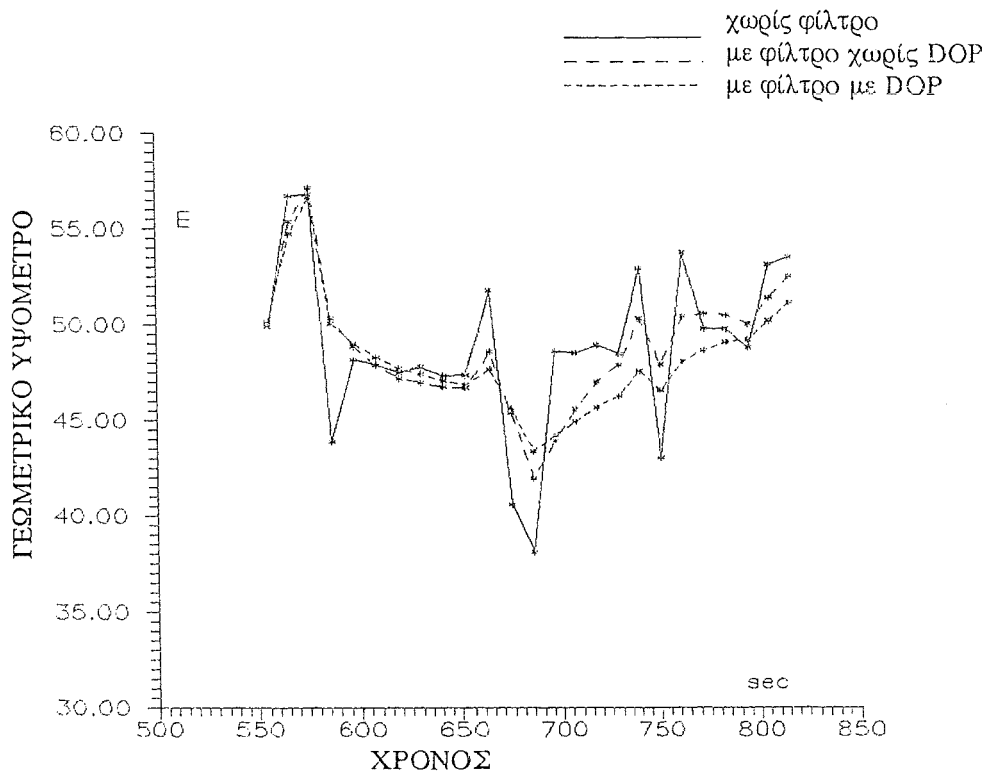
Σχήμα 4.18 Τυπική απόκλιση του υψομέτρου πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για ευθύγραμμη κίνηση



Σχήμα 4.19 Λεπτομέρεια της μεταβολής της ταχύτητας κατά πλάτος πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για τις περιπτώσεις που η γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων λαμβάνεται ή όχι υπόψη.



Σχήμα 4.20 Λεπτομέρεια της μεταβολής της ταχύτητας κατά υψόμετρο πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για τις περιπτώσεις που η γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων λαμβάνεται ή όχι υπόψη.



Σχήμα 4.21 Λεπτομέρεια της μεταβολής του υψόμετρου πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, για τις περιπτώσεις που η γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων λαμβάνεται ή όχι υπόψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

5.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση και η εφαρμογή του φίλτρου Kalman που έγιναν στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο αποσκοπούσαν στην εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων σχετικά με την πρακτική εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής φιλτραρίσματος. Αυτά τα συμπεράσματα με τις προτάσεις που προκύπτουν παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, που είναι και το τελευταίο της εργασίας αυτής.

Ξεκινώντας από τα δεδομένα μπορούμε να πούμε ότι σε γενικό επίπεδο είναι αρκετά καλά, τουλάχιστον όσο αφορά την απαραίτητη πληροφορία στο θαλάσσιο εντοπισμό, δηλαδή την οριζοντιογραφική θέση. Είδαμε ότι η εξωτερική ακρίβεια δεν είναι δυνατό να εκτιμηθεί όταν διατίθεται μόνο κάποια σειρά δεδομένων και δεν υπάρχει δυνατότητα για την εφαρμογή των τεχνικών που αναπτύχθηκαν σύντομα στο υποκεφάλαιο (4.1). Πάντως από την γενική γνώση του συστήματος GPS, ο απόλυτος κινηματικός προσδιορισμός με μετρήσεις του κώδικα C/A θεωρείται ότι γίνεται με μία ακρίβεια της τάξης των 20-30 μέτρων. Αυτό βέβαια ίσχυε πριν την εφαρμογή της επιλεκτικής διαθεσιμότητας, όταν συλλέχθηκαν τα συγκεκριμένα δεδομένα της εργασίας. Η αντίστοιχη σημερινή τιμή είναι γύρω στα 100 μέτρα για το 95% του χρόνου και γύρω στα 300 για το 99% του χρόνου. Κάτι που πρέπει να επισημανθεί εδώ, είναι ότι το υψόμετρο μπορεί να προσδιορίζεται μόνο όταν υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις δορυφόροι πάνω από τον ορίζοντα του τόπου. Έτσι, καθώς το σύστη-

μα δεν έχει ολοκληρωθεί ακόμα εντελώς, τα δεδομένα περιέχουν διαστήματα με κάλυψη τριών δορυφόρων κατά τα οποία δεν προσδιορίζεται τιμή για το υψόμετρο.

Από πλευράς θορύβου οι μετρήσεις πρέπει να διαχωριστούν σε σχέση με την οριζόντια και κατακόρυφη θέση. Η πρώτη περιέχει ελάχιστα ποσοστά θορύβου και αυτό οφείλεται στο δέκτη με τον οποίο έγιναν οι παρατηρήσεις, ο οποίος ήταν δέκτης ναυσιπλοΐας υψηλών απαιτήσεων. Για το υψόμετρο τα πράγματα ήταν εντελώς διαφορετικά, καθώς αυτό χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη έντονου θορύβου. Είναι σημαντικό όμως ότι το φαινόμενο αυτό δεν είναι μόνιμο. Υπάρχουν χρονικά διαστήματα κατά τα οποία ο παραπάνω θόρυβος κυμαίνεται σε πολύ μικρότερα επίπεδα. Αυτά τα διαστήματα συνδέονται μεταξύ τους με μικρές απότομες μεταβολές στην τιμή του υψομέτρου της τάξης των ένα έως δύο μέτρων. Αυτές οι μεταβολές οφείλονται είτε σε αλλαγή του σχηματισμού των δορυφόρων ή ανανέωση των εφημερίδων τους, είτε σε παροδικές διακοπές στις μετρήσεις που προκαλούνται από τεχνικούς λόγους.

Όλα τα παραπάνω πρέπει να ληφθούν υπόψη, όταν απαιτείται η διερεύνηση καταλληλότητας ενός δέκτη GPS που θα χρησιμοποιηθεί ως μέσο πλοήγησης.

Για την εφαρμογή του αλγόριθμου του φίλτρου απαιτείται η γνώση των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τη δυναμική του συγκεκριμένου κινητού, που δεν είναι άλλες από τα μήκη συσχέτισης. Όταν αυτά προσδιορίζονται από μετρήσεις, πρέπει αρχικά να ελέγχεται η καταλληλότητα των μετρήσεων σύμφωνα με τα κριτήρια του υποκεφαλαίου (3.3). Τα μήκη συσχέτισης που τελικά θα προκύψουν θα αντιπροσωπεύουν τη συγκεκριμένη πορεία που αναλύθηκε. Η χρησιμοποίησή τους για οποιαδήποτε κίνηση του πλοίου, είναι κάτι που πρέπει να γίνεται με προσοχή, ώστε τα αποτελέσματα του φίλτρου να είναι κάθε φορά βέλτιστα.

Ανάλογη προσοχή χρειάζεται και στον προσδιορισμό του θορύβου των μετρήσεων. Είναι απαραίτητη η σε βάθος γνώση της λειτουργίας του χρησιμοποιούμενου συστήματος εντοπισμού προκειμένου να μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ του πραγματικού θορύβου των παρατηρήσεων και της επίδρασης των εξωτερικών τυχαίων διαταραχών. Επιπλέον τα επίπεδα θορύβου που προσδιορίζονται από ένα συγκεκριμένο δείγμα δεν είναι κοινά για οποιαδήποτε μέθοδο μέτρησης με το ίδιο σύστημα. Για παράδειγμα, αν ο προσδιορισμός είναι σχετικός η αντιμετώπιση του θορύβου θα πρέπει να είναι διαφορετική. Το ίδιο ισχύει αν χρησιμοποιηθεί διαφορετικός δέκτης GPS, ή αν γίνουν άλλου είδους παρατηρήσεις, όπως με τον κώδικα P ή με τις φάσεις των φερουσών συχνοτήτων. Τέλος, ακόμα και αν όλα τα παραπάνω παραμείνουν αμετάβλητα, οι συγκεκριμένες τιμές για το θόρυβο που προσδιορίστηκαν στην εργασία αυτή είναι ακατάλληλες για σημερινή χρήση. Η αιτία γι' αυτό είναι η εφαρμογή της επιλεκτικής διαθεσιμότητας. Η ποιότητα των συντεταγμένων που προσδιορίζονται σήμερα με τον C/A κώδικα είναι πολύ κατώτερη από αυτή πριν τον Ιούλιο του 1991. Η διερεύνηση της υφιστάμενης κατάστασης είναι πολύ ενδιαφέρουσα, γιατί ο κώδικας C/A θα είναι ο ευρύτερα χρησιμοποιούμενος στο μέλλον για κινηματικές εφαρμογές μέσης και χαμηλής ακρίβειας. Από τη μέχρι τώρα πάντως εμπειρία της επίδρασης της επιλεκτικής διαθεσιμότητας προκύπτει ότι ο εισαγόμενος θόρυβος έχει ουσιαστικά τυχαίο χαρακτήρα, οπότε η απομάκρυνση του

σε αληθή χρόνο από τις μετρήσεις είναι κάτι πρακτικά ακατόρθωτο. Έτσι, αυτό που διαφαίνεται ως λύση στο πρόβλημα για κινηματικές εφαρμογές υψηλής ακρίβειας, είναι ο σχετικός προσδιορισμός.

Έχοντας μέχρι εδώ σχολιάσει τις εργασίες που απαραίτητα προηγούνται της εφαρμογής του αλγόριθμου του φίλτρου, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε τα συμπεράσματα που αφορούν τα αποτελέσματα του φίλτρου. Αρχικά αξίζει να αναφερθεί κάτι που αφορά το σύνολο των αποτελεσμάτων. Πρόκειται για την επίδραση των αρχικών συνθηκών στις επόμενες εκτιμήσεις. Το πρόβλημα έχει δύο μέρη: Ποια είναι η εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης για την πρώτη στιγμή που εφαρμόζεται το φίλτρο και ποιος είναι ο αντίστοιχος πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων. Αυτοί οι πίνακες δεν μπορούν να είναι γνωστοί στη συγκεκριμένη στιγμή γιατί προκύπτουν από την εφαρμογή του φίλτρου. Το θέμα αυτό αναλύθηκε στο υποκεφάλαιο (3.4). Εδώ απλά θα αναφερθούν τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων που σε διαγραμματική μορφή δόθηκαν στο υποκεφάλαιο (4.3). Όσον αφορά το αρχικό διάνυσμα εκτίμησης το πρόβλημα δεν είναι δύσκολο. Για τις συγκεκριμένες (ομαλοποιημένες από το δέκτη) συντεταγμένες οριζόντιας θέσης η διαφορά μέτρησης-εκτίμησης είναι πολύ μικρή. Έτσι αν ως αρχική εκτίμηση χρησιμοποιηθεί η αντίστοιχη παρατήρηση, η επίδραση στα αποτελέσματα είναι αμελητέα. Βέβαια δεν ισχύει το ίδιο για το υψόμετρο, αλλά δεν υπάρχει τρόπος να προσεγγίσουμε σε μία διαδικασία φιλτραρίσματος αληθούς χρόνου την αρχική εκτίμηση του υψομέτρου πριν να αρχίσει η λειτουργία του φίλτρου. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί με εξομάλυνση, αλλά αυτή δεν είναι διαδικασία αληθούς χρόνου. Άρα λοιπόν και για το υψόμετρο η αρχική εκτίμηση θα είναι η αρχική μέτρηση. Σχετικά τώρα με το θέμα του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων, από τα διαγράμματα της τυπικής απόκλισης της οριζόντιας θέσης πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, φαίνεται καθαρά ότι οι αρχικές τιμές χάνουν την επίδρασή τους μετά την τρίτη εφαρμογή του φίλτρου. Για το υψόμετρο οι εκτιμήσεις έχουν πολύ μικρότερη μεταβλητότητα από τις μετρήσεις. Έτσι η αρχική προσέγγιση που γίνεται έχει επίδραση στα αποτελέσματα για περισσότερο χρόνο. Ο αντίστοιχος με την οριζόντια θέση αριθμός επαναλήψεων είναι περίπου δέκα. Το να δοθεί ως αρχική τιμή για τη μεταβλητότητα του υψομέτρου η μεταβλητότητα της μέτρησης μειωμένη, όπως είχε αναφερθεί στο υποκεφάλαιο (3.4), δεν κρίνεται σκόπιμο, γιατί οι μετρήσεις περιέχουν πολύ θόρυβο. Αυτό θα ήταν σωστό να γίνει για το μήκος και το πλάτος που περιέχουν ελάχιστο θόρυβο. Οι τιμές του υψομέτρου όμως απέχουν από μέτρηση σε μέτρηση μέχρι και δέκα μέτρα. Αν λοιπόν η αρχική εκτίμησή του (που αντικαθίσταται από την μέτρηση) συνοδευτεί από την παραπάνω μειωμένη μεταβλητότητα, το φίλτρο θα “παρακολουθήσει” πιο δύσκολα τις επόμενες μεταβολές. Είναι σαν να δίνεται στο φίλτρο η πληροφορία ότι η πρώτη μέτρηση είναι περισσότερο σωστή από όσο πραγματικά είναι. Το τελικό συμπέρασμα δηλαδή είναι ότι η μεταβλητότητα της αρχικής εκτίμησης του υψομέτρου πρέπει να είναι αυτή της αντίστοιχης μέτρησης.

Εξετάζοντας τώρα τα επιμέρους αποτελέσματα, από τις συντεταγμένες της θέσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το υψόμετρο. Οι τιμές που παρέχει ο δέκτης είναι άχρηστες για οποιαδήποτε πρακτική εφαρμογή. Βέβαια αυτό όπως ειπώθηκε και παραπάνω, δεν ισχύει για όλο το διάστημα που καλύπτουν τα δεδομένα, αλλά για

μόνο κάποια διαστήματα μέσα σε αυτό. Ένα φίλτρο όμως που καλείται να αντιμετωπίσει πρακτικά προβλήματα, πρέπει στο γενικό πλαίσιο λειτουργίας του να μπορεί να αντιμετωπίζει και αυτά τα διαστήματα. Το συμπέρασμα από τα αποτελέσματα είναι ότι η κατάσταση βελτιώνεται πολύ καθώς το εύρος μεταβολής των υψομέτρων μειώνεται από 13 μέτρα σε τέσσερα. Έτσι οι φιλτραρισμένες τιμές θα μπορούσαν να έχουν κάποια χρησιμότητα σε εφαρμογές χαμηλής και μέσης ακρίβειας. Όμως σε εφαρμογές υψηλής ακρίβειας δε μπορούν να αποτελέσουν παρά ενδεικτικά στοιχεία.

Από τα αποτελέσματα που είχαν πειραματικές δοκιμές με άλλα πιο μικρά μήκη συσχέτισης για το υψόμετρο, προκύπτει ότι αυτά δε μπορούν να βελτιώσουν πολύ την κατάσταση. Αυτό το γεγονός έχει διπλή σημασία για την εφαρμογή που έγινε. Πρώτα σημαίνει ότι το μήκος συσχέτισης που επιλέχθηκε (βλ. σχέση 4-3) είναι σωστό. Αν δεν ήταν, τότε η χρήση μιας μικρότερης τιμής θα βελτιώνε αισθητά τα αποτελέσματα. Εδώ όμως υπάρχει είναι ένα λεπτό ζήτημα που θέλει προσοχή. Το παραπάνω ισχύει μόνο για τη συγκεκριμένη τιμή που έχει δοθεί στο θόρυβο των μετρήσεων. Όπως έχει τονιστεί και προηγουμένως, η σωστή λειτουργία του φίλτρου απαιτεί τη ρεαλιστικότητα των τιμών τόσο των μηκών συσχέτισης όσο και του θορύβου. Αν λοιπόν δοθεί λάθος τιμή στο θόρυβο, τότε τα καλύτερα αποτελέσματα θα προκύπτουν από μία λάθος τιμή του μήκους συσχέτισης. Η εμπειρία όμως πάνω σε μετρήσεις GPS έχει δείξει ότι η τιμή που χρησιμοποιήθηκε στο πρόγραμμα (σχέση 4-2 και VDOP) αντιπροσωπεύει καλά το θόρυβο των μετρήσεων.

Έχοντας εξασφαλίσει την ορθότητα των δύο παραπάνω τιμών, προκύπτει και το δεύτερο συμπέρασμα από τις πειραματικές δοκιμές με τα μήκη συσχέτισης. Αφού με σωστές τιμές των παραμέτρων τα αποτελέσματα δεν είναι τα επιθυμητά, η αιτία πρέπει να αναζητηθεί στην καταλληλότητα του μαθηματικού μοντέλου της πρόβλεψης που χρησιμοποιείται στο φίλτρο. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτό της σταθερής ταχύτητας. Ήταν αναμενόμενο όμως ότι δεν είναι το καταλληλότερο μοντέλο για να περιγράψει την κίνηση του πλοίου κατά υψόμετρο, γιατί συνήθως ένα πλοίο παρουσιάζει αυξομειώσεις στο υψόμετρό του με πολύ μικρή περίοδο της τάξης των μερικών δευτερολέπτων. Η ταχύτητα του στη διεύθυνση του υψόμετρου μεταβάλλεται γι' αυτό το λόγο συνεχώς από θετική σε αρνητική. Η θεώρηση λοιπόν της σταθερής ταχύτητας απέχει πολύ από την πραγματικότητα και αυτό φαίνεται στις τιμές του υψόμετρου που προκύπτουν, οι οποίες εξακολουθούν να παρουσιάζουν ένα ανεπιθύμητα μεγάλο εύρος διακύμανσης. Ο θόρυβος που εισάγεται στο μοντέλο της πρόβλεψης (βλ. σχέση 3-75) δε μπορεί να αντιμετωπίσει φυσικά το πρόβλημα, γιατί εξ' ορισμού ο θόρυβος εισάγεται για να καλύψει μικρές αποκλίσεις της πραγματικότητας από την τιμή της σταθερής ταχύτητας. Η εφαρμογή του μοντέλου σταθερής επιτάχυνσης είναι λογικό να έχει πολύ καλύτερα αποτελέσματα, κάτι που εξάλλου έχει διαπιστωθεί και από άλλους ερευνητές (Λιαπάκης 1991). Όμως το θέμα της καταλληλότητας του μοντέλου δεν έχει τελειώσει εδώ. Ένας από τους στόχους της εφαρμογής του φίλτρου ήταν να διερευνηθεί κατά πόσο το μοντέλο σταθερής ταχύτητας μπορεί να ανταποκριθεί σε κίνηση του πλοίου σε στροφές (βλ. υποκεφάλαιο 3.3). Αυτό όμως θα σχολιαστεί αργότερα.

Τώρα θα ασχοληθούμε με την επίδραση του φίλτρου στις συνιστώσες της ταχύτητας. Τα αποτελέσματα για το μήκος και το πλάτος είναι κοινά. Οι απότομες αυξομειώσεις της ταχύτητας που οφείλονται στο θόρυβο των μετρήσεων γίνονται μετά την εφαρμογή του φίλτρου πολύ πιο ομαλές. Είναι σημαντικό ότι το ιδανικό αποτέλεσμα του φίλτρου δεν είναι μία απόλυτα σταθερή ταχύτητα για όλη τη διάρκεια του χρόνου, που θα παριστανόταν στο αντίστοιχο διάγραμμα από μία ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα του χρόνου. Η κίνηση του πλοίου δικαιολογεί κάποιες αυξομειώσεις στην ταχύτητά του, οι οποίες εξαρτώνται από το συγκεκριμένο πλοίο και από τις συνθήκες πλεύσης (κύματα, άνεμος κ.λ.π.). Η παράσταση γι' αυτό το λόγο της ταχύτητας ως συνάρτησης του χρόνου μπορεί να είναι μία ελαφρά τεθλασμένη ευθεία, χωρίς κάτι τέτοιο να σημαίνει υποχρεωτικά την ύπαρξη θορύβου στις παρατηρήσεις. Το πρόβλημα όμως της οριοθέτησης αυτών των τιμών, πέρα από τις οποίες η διαταραχή της ευθείας συνεπάγεται την ύπαρξη θορύβου, είναι μία πολύ δύσκολη εργασία που απαιτεί και γνώσεις ναυπηγικής. Εκτιμάται πάντως ότι οι φιλτραρισμένες τιμές των συνιστωσών της οριζόντιας ταχύτητας είναι αρκετά καλές και μία παραπέρα βελτίωση θα απαιτούσε την εφαρμογή του μοντέλου σταθερής επιτάχυνσης. Εδώ θα παραθέσουμε και μερικά ενδεικτικά στοιχεία της επίδρασης του φίλτρου. Το εύρος των ταχυτήτων των μετρήσεων μειώνεται για το πλάτος από 0.4 σε 0.1 m/sec και για το μήκος από 0.8 σε 0.2 m/sec. Η ποσοστιαία μείωση δηλαδή είναι και για τις δύο συνιστώσες περίπου 75%.

Εξετάζοντας τώρα την ταχύτητα του υψομέτρου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επίδραση του φίλτρου βελτιώνει πάρα πολύ την τιμές των μετρήσεων. Αυτό είναι αποτέλεσμα του μεγάλου θορύβου, ο οποίος συνοδεύει τις παρατηρήσεις του υψομέτρου στη συνόρθωση. Η αντίστοιχη με αυτή των οριζόντιων ταχυτήτων ποσοστιαία μείωση είναι περίπου 90%.

Κάτι που ισχύει για το σύνολο των ταχυτήτων είναι ότι το φίλτρο μπορεί να “αντιλαμβάνεται” τις μεταβολές που υπάρχουν στις μετρήσεις, με άλλα λόγια το φίλτρο δεν είναι “σκληρό”, όπως λέγεται συνήθως. Αυτό σημαίνει ότι η πρόβλεψη δεν έχει υπερβολικό βάρος. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, μία αυξητική για παράδειγμα τάση που θα είχαν για κάποιο διάστημα οι τιμές θα εξακολουθούσε να υπάρχει στις φιλτραρισμένες τιμές και όταν οι τιμές των μετρήσεων άρχιζαν να φθίνουν. Επίσης αν η πρόβλεψη είχε λιγότερο βάρος από το σωστό, τότε οι φιλτραρισμένες τιμές θα επηρεάζονταν πολύ από τις μετρήσεις και τα εύρη διακύμανσης δε θα μειώνονταν σημαντικά. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή που έγινε σε αυτή την εργασία, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι περίπου έχει επιτευχθεί η “χρυσή τομή” στο συσχέτισμό θορύβου των μετρήσεων και των μηκών συσχέτισης.

Για να επισφραγιστεί αυτό όμως πρέπει να δούμε και κάτι τελευταίο: τη συμπεριφορά του φίλτρου για κίνηση πάνω σε στροφές. Είχε εξηγηθεί στο υποκεφάλαιο (4.3) ότι αυτή είναι άμεση συνάρτηση του μήκους συσχέτισης. Το συμπέρασμα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των διαφόρων μηκών συσχέτισης είναι ότι αυτό πρέπει να είναι μεταβλητό στον υπολογιστικό αλγόριθμο ανάλογα με την πορεία που προβλέπεται να ακολουθήσει το πλοίο. Αν δεν υπάρχει τέτοια πληροφορία, τότε καλό είναι να δοθεί το μήκος συσχέτισης που αντιστοιχεί στην αξιοποίηση των

οριακών δυνατοτήτων του πλοίου. Πάντως η αποχή των συντεταγμένων του μοντέλου που θεωρεί μήκος συσχέτισης 0.002 από τις μετρήσεις, δεν είναι μεγαλύτερη από δύο μέτρα για συνηθισμένες στροφές. Για απότομες στροφές αυξάνει ανάλογα. Σε αυτές τις περιπτώσεις ακόμα και το αντίστοιχο μοντέλο με τιμή 0.001 παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις. Όλα τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πράγματι το μοντέλο σταθερής ταχύτητας δεν παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα για κίνηση σε στροφές. Κανονικά για να έχουμε φιλτράρισμα πάνω σε στροφές με την αυστηρή σημασία της λέξης, πρέπει αυτή η κίνηση να προβλέπεται από το μοντέλο πρόβλεψης (βλ. σχέση μετάβασης 3-2, 3-75). Για να εφαρμοστεί αυτό στην πράξη πρέπει να υπάρχει σύστημα διαρκούς επικοινωνίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή με το σύστημα ελέγχου του πλοίου. Κάτι τέτοιο δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να επιτευχθεί, τουλάχιστον κατά μεγάλο μέρος, όμως πρόκειται για μία αντιμετώπιση του προβλήματος που ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας εργασίας.

Η μελέτη της τυπικής απόκλισης των συνιστωσών θέσης πριν και μετά την εφαρμογή του φίλτρου, γίνεται σαν τελική επιβεβαίωση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από την ανάλυση της επίδρασης του φίλτρου στις ίδιες τις συνιστώσες της θέσης. Λόγω της πολύ καλής ποιότητας των μετρήσεων για την οριζόντια θέση, η μείωση της τυπικής τους απόκλισης μετά την εφαρμογή του φίλτρου ανέρχεται σε ένα ποσοστό περίπου 15%. Αντίθετα για το υψόμετρο που χαρακτηριζόταν από πολύ χειρότερη ακρίβεια, η αντίστοιχη μείωση είναι της τάξης του 55%.

Πριν τελειώσουμε αυτό το υποκεφάλαιο έμεινε να σχολιάσουμε και το ενδιαφέρον θέμα της εισαγωγής στον αλγόριθμο των ποσοτήτων DOP. Η εφαρμογή έδειξε ότι αυτές οι ποσότητες πρέπει να εισάγονται στο πρόγραμμα για τον ΗΥ προκειμένου να επιτυγχάνεται πιο ουσιαστικό φιλτράρισμα. Εκτός αυτού η εισαγωγή των ποσοτήτων DOP δίνει στο όλο μοντέλο την πληροφορία του πότε υπάρχει αύξηση του θορύβου, η οποία οφείλεται σε χειρότερηση της γεωμετρίας των χρησιμοποιούμενων δορυφόρων. Με αυτό τον τρόπο γίνεται δηλαδή το φίλτρο ικανό να “λαμβάνει υπόψη του” δυναμικές μεταβολές στο θόρυβο των παρατηρήσεων.

5.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Τα συμπεράσματα που μόλις παραπάνω αναλύθηκαν μπορούν να οδηγήσουν στη διατύπωση προτάσεων που αφορούν την εφαρμογή στην πράξη του φίλτρου Kalman. Καθώς η ανάλυση που έγινε περιλαμβάνει και τη μορφή και ποιότητα των παρατηρήσεων, ενδιαφέρουσες προτάσεις προκύπτουν και για την καταλληλότητα διαφόρων ειδών δεκτών ναυσιπλοΐας GPS.

Πριν προχωρήσουμε στο θέμα αυτό καλό είναι να δώσουμε μία γενική κατηγοριοποίηση των ακριβειών που απαιτούνται στις θαλάσσιες δραστηριότητες. Οι βασικές κατηγορίες είναι (RTCM Committee, 1981) :

- Υψηλής ακρίβειας εντοπισμός : 1-20 m
- Μέσης ακρίβειας εντοπισμός : 20-200 m

- Χαμηλής ακρίβειας εντοπισμός : 200-2000 m

Η φιλοσοφία που επικρατεί στην προσπάθεια κάλυψης των εκάστοτε αναγκών είναι να επιτυγχάνεται η καλύτερη δυνατή ακρίβεια (ανάλογα με τις απαιτήσεις) με το μικρότερο δυνατό κόστος. Έτσι η εξασφάλιση του ακριβέστερου εξοπλισμού δεν είναι η σωστή επιλογή γιατί το κόστος αυξάνει δυσανάλογα. Αντ' αυτού προτιμάται η αύξηση της ακρίβειας με την συνδυασμένη χρήση διαφόρων συστημάτων εντοπισμού σε Ολοκληρωμένα Συστήματα Πλοήγησης (Λιαπάκης, 1991) ή και η εφαρμογή κατάλληλων αλγορίθμων, όπως φιλτράρισμα και εξομάλυνση.

Με το παραπάνω σκεπτικό ένας απλός δέκτης ναυσιπλοΐας GPS (C/A- κώδικας) υπερπληρεί τις απαιτήσεις για χαμηλής ακρίβειας εντοπισμό και καλύπτει αρκετές από τις αντίστοιχες του εντοπισμού μέσης ακρίβειας. Για την ικανοποίηση των καλύτερων ακριβειών της δεύτερης κατηγορίας προβάλλει η ανάγκη της εφαρμογής αλγορίθμων στα αποτελέσματα του απλού δέκτη ή της χρησιμοποίησης δέκτη ναυσιπλοΐας με δυνατότητα μέτρησης και ακτινικών ταχυτήτων (φαινόμενο Doppler), ο οποίος να παρέχει όπως είδαμε φιλτραρισμένες συντεταγμένες θέσης. Για μεγαλύτερες ακρίβειες η χρήση ενός δέκτη μέτρησης φάσεων δεν αντιμετωπίζει ουσιαστικά το πρόβλημα. Η αιτία είναι η μικρή αύξηση της επιτυχανόμενης ακρίβειας που οφείλεται στην εισαγωγή στο σύστημα επιπλέον αγνώστων (ασάφειες φάσεις). Η χρήση δεκτών του κώδικα P είναι μία καλή λύση προς το παρόν στην περίπτωση που διατίθενται τέτοιοι δέκτες. Διαφορετικά η επένδυση στην αγορά τέτοιων δεκτών είναι κάτι που δεν προτείνεται, καθώς το Υπουργείο Άμυνας των ΗΠΑ που ελέγχει το σύστημα έχει ανακοινώσει ότι στο προσεχές μέλλον ο κώδικας P δε θα είναι διαθέσιμος σε μη στρατιωτικούς χρήστες. Η συνεκτίμηση όλων των δυνατοτήτων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μεγαλύτερες ακρίβειες επιτυγχάνονται με σχετικό προσδιορισμό. Για την εφαρμογή του απαιτείται η τοποθέτηση ενός δεύτερου δέκτη σε ένα γνωστό σημείο στην ξηρά κατά το δυνατό κοντά στον κινητό δέκτη και ένα σύστημα επικοινωνίας μεταξύ των δύο δεκτών. Όλα τα παραπάνω ισχύουν και με τις σημερινές συνθήκες λειτουργίας του συστήματος, όσον αφορά την εφαρμογή της επιλεκτικής διαθεσιμότητας. Από πλευράς όμως κάλυψης δορυφόρων είναι απαραίτητη η ολοκλήρωση του συστήματος, κάτι που προβλέπεται να γίνει πραγματικότητα σε ένα-δύο χρόνια. Για την Ελλάδα πάντως υπάρχει ήδη μία κάλυψη τεσσάρων δορυφόρων διάρκειας 22 ωρών (Λιαπάκης, 1991), που μπορεί να εξυπηρετεί τις περισσότερες ερευνητικές και παραγωγικές εργασίες.

Έχοντας επιλέξει τον κατάλληλο εξοπλισμό για μία συγκεκριμένη εργασία, προκειμένου να εφαρμοστούν κάποιοι αλγόριθμοι βελτίωσης της ακρίβειας απαιτείται η πολύ καλή γνώση της συμπεριφοράς του θορύβου του συστήματος. Στις τοπογραφικές και γεωδαιτικές εργασίες αυτή η πληροφορία παρέχεται από τον κατασκευαστή του οργάνου. Στο δυναμικό περιβάλλον όμως της θάλασσας μπορούν να παρουσιαστούν σημαντικές αποκλίσεις από τις αντίστοιχες τιμές. Σε αυτό συμβάλλει επίσης και το γεγονός ότι το σύστημα GPS δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως. Για τους λόγους αυτούς είναι σκόπιμο για εφαρμογές μέσης και υψηλής ακρίβειας η ακρίβεια του οργάνου να ελέγχεται στην πράξη. Κάποιες τεχνικές αναφέρθηκαν στο υποκεφάλαιο (4.1), όμως το θέμα αυτό είναι τεράστιο και δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε αυτή την εργασία. Η οποιαδήποτε πάντως προσπάθεια προσέγγισης του προβλήμα-

τος απαιτεί επαρκή γνώση της λειτουργίας του GPS και της δυναμικής του συστήματος θάλασσα-πλοίο-δέκτης.

Η εφαρμογή τέλος των αλγορίμων προϋποθέτει την εισαγωγή στο μοντέλο και των μηκών συσχέτισης, ως τρόπου έκφρασης της δυναμικής του πλοίου. Αυτές οι ποσότητες πρέπει να προσδιορίζονται από ανάλυση της κίνησης του συγκεκριμένου σκάφους. Η πλέον σωστή αντιμετώπιση είναι να γίνεται ο προσδιορισμός αυτών των ποσοτήτων για διάφορα είδη κίνησης του πλοίου· από αυτή που αξιοποιεί τη μέγιστη δυναμική του μέχρι μία πολύ ομαλή και σταθερή πορεία. Το πρόγραμμα για τον HY θα παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα επιλογής της τιμής που αντιστοιχεί στην κίνηση που κάθε φορά θα κάνει το πλοίο. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν το πλοίο ακολουθεί μία σταθερή πορεία. Αν στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιηθεί το μήκος συσχέτισης που προέκυψε από την ανάλυση της δυναμικά ακραίας πορείας του πλοίου, τότε η επίδραση του φίλτρου Kalman είναι σημαντικά μειωμένη.

Σχετικά τώρα με τον τρόπο εφαρμογής του φίλτρου οι πρώτες προτάσεις αφορούν τις αρχικές τιμές για το διάνυσμα κατάστασης και τον αντίστοιχο πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων. Χωρίς πρόβλημα μπορούν να εισάγονται τα αντίστοιχα στοιχεία των μετρήσεων, αφού αυτή η προσέγγιση χάνει κάθε επίδρασή της στα αποτελέσματα μετά από δύο το πολύ λεπτά.

Το μοντέλο σταθερής ταχύτητας παρέχει πολύ καλά αποτελέσματα στις συνιστώσες οριζόντιας θέσης για ευθύγραμμη κίνηση. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το υψόμετρο είναι αισθητά κατώτερης ποιότητας, όμως στην πλειοψηφία των θαλάσσιων εφαρμογών η πληροφορία του υψομέτρου είναι περιττή. Για τις περιπτώσεις εργασιών όπου ενδιαφέρει η κίνηση μόνο σε ευθεία γραμμή χωρίς το υψόμετρο, οι στροφές που πραγματοποιούνται δεν είναι απότομες και οι μετρήσεις λαμβάνονται ανά μικρά χρονικά διαστήματα, το μοντέλο σταθερής ταχύτητας είναι επαρκές. Όταν υπάρχει απαίτηση για υψηλές ακρίβειες και ενδιαφέρον για το σύνολο της πορείας του πλοίου επιβάλλεται η χρησιμοποίηση του μοντέλου σταθερής ταχύτητας. Αυτό παρέχει περισσότερο αξιόπιστες τιμές και για το υψόμετρο, αλλά και για την οριζόντια θέση στις στροφές. Η εφαρμογή όμως αυτού του μοντέλου προϋποθέτει τη ύπαρξη μετρήσεων για την ταχύτητα του πλοίου. Έτσι ένας απλός δέκτης ναυσιπλοΐας παύει να επαρκεί και πρέπει να αντικατασταθεί από ένα δέκτη που να μετρά και ακτινικές ταχύτητες.

Ένα τελευταίο συμπέρασμα που αφορά και τα δύο μοντέλα του φίλτρου είναι ότι ο αλγόριθμος πρέπει να περιλαμβάνει και τις ποσότητες DOP προκειμένου να εισάγεται η γεωμετρία του σχηματισμού των δορυφόρων. Για να επιτευχθεί αυτό στην πράξη απαιτείται διαρκής επικοινωνία του ηλεκτρονικού υπολογιστή με το αρχείο στο οποίο ο δέκτης καταγράφει τις ποσότητες DOP.

Όλα όσα αναφέρθηκαν στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αυτής προσφέρουν το γενικό υπόβαθρο στο οποίο θα στηριχθεί η χρησιμοποίηση στην πράξη του φίλτρου Kalman για υδρογραφικές εφαρμογές. Αποτελούν επίσης ένα γενικότερο πλαίσιο για κάθε είδους κινηματικές εφαρμογές του GPS.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Cannon, M. E., K. P. Schwarz, R. Wong (1986): Kinematic positioning with GPS: An analysis of road test. Proceedings of the fourth International Geodetic Symposium on satellite positioning, Univ. of Texas, Austin, USA.
- Δερμιάνης, Α. (1987): Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης, Εκδόσεις Ζήτη, Τόμος 1, Θεσσαλονίκη.
- Δερμιάνης, Α. (1987): Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης, Εκδόσεις Ζήτη, Τόμος 2, Θεσσαλονίκη.
- De Munck, J. (1984): Kalman filtering in "Radiopositioning on Sea", (Bakker G., De Munck J., Strang Vav Hees G.). Dept of Geodesy, Delft Univ. of Technology.
- Gelb, A., A. Sutherland (1970): Software advances in aided inertial navigation systems. Navigation: Journal of the Institute of Navigation (USA), vol. 17, No 4, 358-369.
- Gelb, A. (1974): Applied optimal estimation. The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology.
- Huep, W. (1986): Zur positionsschätzung im gestörten Kalman-Filter am Beispiel eines manövrierenden Wasserfahrzeuges, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 143.
- Κατσάμπαλος, Κ., Η. Τζιαβός (1991): Φυσική Γεωδαισία, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Kleusberg, A., S. H. Quek, D. E. Wells, G. Lachapelle, J. Hagglund (1986): GPS relative positioning techniques for moving platforms. Proceedings of the fourth International Geodetic Symposium on satellite positioning, Univ. of Texas, Austin, USA.
- Lachapelle, G., K. P. Schwarz (1989): Kinematic applications of GPS and GPS/INS. Algorithms, procedures, and equipment trends. International Association of Geodesy Symposia. Symposium No 102 : "Global Positioning System: An Overview" (Bock, Y., Leppard, N., ed.) Springer-Verlag.
- Leick, A. (1990): GPS Satellite Surveying. A Wiley - Interscience Publication. John Wiley & Sons.
- Λιαπάκης, Χ. (1991): Σχεδίαση Ολοκληρωμένου Συστήματος Ναυσιπλοΐας με Βελτιστοποίηση Δεδομένων Ραδιεντοπισμού. Διδακτορική διατριβή, Τομέας Τοπογραφίας του ΕΜΠ.
- Λιβιεράτος, Ε. (1992): Θεωρία της Γεωδαισίας, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Λιβιεράτος, Ε., Α. Φωτίου (1986): Ελλειψοειδής Γεωδαισία και Γεωδαιτικά Δίκτυα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Μανιάτης, Α., Δ. Παραδείσης (1991): GPS: Εφαρμογές του δορυφορικού συστήματος στην πράξη. Πρακτικά συνεδρίου "Ο αγρονόμος και τοπογράφος μηχανικός προς το 2000. Εξελίξεις - Προοπτικές - Δυνατότητες." Θεσσαλονίκη 6-8 Δεκεμβρίου 1990, σελ. 191-210. Έκδοση του Συλλόγου ΔΑΤΜ Βόρειας Ελλάδας ΤΕΕ Τμ. ΚΜ.

- Mertikas, S., D. Delikaraoglou, R. Santerre (1986): Alert program for NAVSTAR global positioning system, TRANSIT, LAGEOS and STARLETTE satellites. Dept. of Surveying Engineering, Univ. of New Brunswick, Fredericton, Canada.
- Papoulis, A. (1965): Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.
- Παραδείσης, Δ. (1992): The global positioning system. Κέντρο δορυφόρων Διονύσου, Τομέας Τοπογραφίας ΕΜΠ.
- Ρωσσικόπουλος, Δ. (1986): Ολοκληρωμένα Τοπογραφικά Δίκτυα Ελέγχου, Διδακτορική διατριβή, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του ΑΠΘ.
- Seeber, v. G. (1975): Aufgaben und Methoden der Meeresgeodäsie. Sonderdruck aus der "Zeitschrift für Vermessungswesen" Nr. 4/1975 169-179, Verlag Konrad Wittwer in Stuttgart.
- Seeber, v. G. (1977): Grenzziehung und Grenzhherstellung auf dem Meer. Zeitschrift für Vermessungswesen Nr. 8/1977 372-380. Verlag Konrad Wittwer in Stuttgart.
- Schwarz, K. P. (1983): Kalman filtering and optimal smoothing, in papers for the CIS adjustments and analysis seminars. (Krakiwsky D., ed) Div. of Surveying Engineering, Univ. of Calgary, Canada.
- Schwarz, K. P., M. E. Cannon, R. Wong (1988): The use of GPS in exploration geophysics - A comparison of cinematic models. Dept. of surveying Engineering, Univ. of Calgary, Canada.
- Sorenson, H. W. (1970): Least-squares estimation: from Gauss to Kalman. Univ. of California. San Diego.
- Trimble Navigation Ltd. (1988): RS232C interface for Trimble model 4000 GPS receivers. Operation Manual, Sunnyvale, California, USA.
- Τζιαβός, Η. (1988): Υδρογραφία και Φυσική Ωκεανογραφία. Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας ΑΠΘ. Εκδ. Υπηρεσία Δημοσιευμάτων ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.
- Τζιαβός, Η. (1991): Ο Συνδυασμός GPS και Αδρανειακών Συστημάτων σε Γεωδαιτικές Εφαρμογές. Πρακτικά συνεδρίου "Ο αγρονόμος και τοπογράφος μηχανικός προς το 2000. Εξελίξεις - Προοπτικές - Δυνατότητες." Θεσσαλονίκη 6-8 Δεκεμβρίου 1990, σελ. 211-245. Έκδοση του Συλλόγου ΔΑΤΜ Βόρειας Ελλάδας ΤΕΕ, Τμ. ΚΜ.
- Tziavos, I. N. (1989): Baseline solution using GPS carrier phase difference observations. Eratosthenes, vol. 26, 327-341.
- Unger, F., N. Ott (1970): Optimal use of redundant information in an inertial navigation system, in "Theory and application of Kalman filtering", (Leondes C.T., ed.). Univ of California, USA.
- Van Dierendonck, A., J. S. Russell, E. Kopitzke, M. Birnbaum (1980): The GPS navigation message. ION Papers on GPS, Vol 1, The Institute of Navigation, Washington D.C.

Wells, D. E., N. Beck, D. Delikaraoglou, A. Kleusberg, E. Krakiwsky, G. Lachapelle, R. Langley, M. Nakiboglou, K.P. Schwarz, J. Tranquillo, P. Vanicek, (1986): Guide to GPS Positioning. Canadian GPS Associates, Frederington, New Brunswick, Canada.