Τμημα Εφαρμοσμενων Μαθηματικων — Ακαδ. έτος 2005–2006

ΕΜ 295: Θεωρια Προσεγγισεων και Υπολογισμοι — 3/3/2006

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

1. Αποδείξτε ότι αν $[c,d] \subset [a,b]$, τότε ο $C[a,b]$ είναι υπόχωρος του $C[c,d]$.

2. Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ μια βάση ενός γραμμ. χώρου V (επί ενός σώματος K). Δείξτε ότι για κάθε $u \in V$ υπάρχουν μοναδικά $u_1, u_2, \ldots, u_n \in K$ τ.ω. $u = \sum_{i=1}^n u_i x_i$.
(Τα u_i λέγονται συνιστώσες του u ως προς τη βάση $\{x_i\}_{i=1}^n$.)

3. Έστω U, V υπόχωροι ενός γραμμικού χώρου X. Αποδείξτε ότι η τομή $U \cap V$ είναι υπόχωρος του X. Πότε η ένωση $U \cup V$ είναι υπόχωρος του X;

4. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι συνεχής απεικόνιση από τον X στον $\mathbb{R}$.

5. Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$: $\|x\| \leqq c\|x\|_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
(Αποδείξτε το χωρίς να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες.)

6. Αν $C^1[a,b]$ είναι ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$, τότε δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\| : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ με
$$\|f\| = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx + \int_a^b (f'(x))^2 dx \right)^{1/2}$$
είναι μία νόρμα στον $C^1[a,b]$.

7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X. Δείξτε ότι αν η (x_n) συγκλίνει, τότε το όριό της είναι μοναδικό.

8. Δείξτε ότι αν $f \in C[a,b]$, τότε $\|f\|_1 \leqq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \leqq (b-a)\|f\|_\infty$.

9. Έστω $w \in C[a,b]$ μια συνάρτηση βάρους, δηλαδή $\forall x \in [a,b] : w(x) > 0$, και $p \geqq 1$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_{w,p} : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με
$$\|f\|_{w,p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p},$$
είναι μια νόρμα στον $C[a,b]$.

10. Αποδείξτε ότι στον $C[0,1]$ οι νόρμες $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$ και $\|f\| = \left(\int_0^1 (1+x)(f(x))^2 dx\right)^{1/2}$ είναι ισοδύναμες.

11. Αποδείξτε ότι στον $C[a,b]$ οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_{w,p}$ είναι ισοδύναμες, όπου $\|\cdot\|_{w,p}$ η νόρμα της Άσκησης 9.

12. Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία ενός γραμμ. χώρου συγκλίνει ως προς μια νόρμα, τότε θα συγκλίνει και ως προς κάθε άλλη ισοδύναμη σ' αυτή νόρμα.

13. Αποδείξτε ότι αν ένας γραμμ. χώρος είναι πλήρης ως προς μια νόρμα, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε άλλη ισοδύναμή της νόρμα.

14. Αποδείξτε ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.

15. Αποδείξτε ότι στον $C[a,b]$ οι νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ δεν είναι ισοδύναμες.

16. Στον $C[a,b]$ οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες;