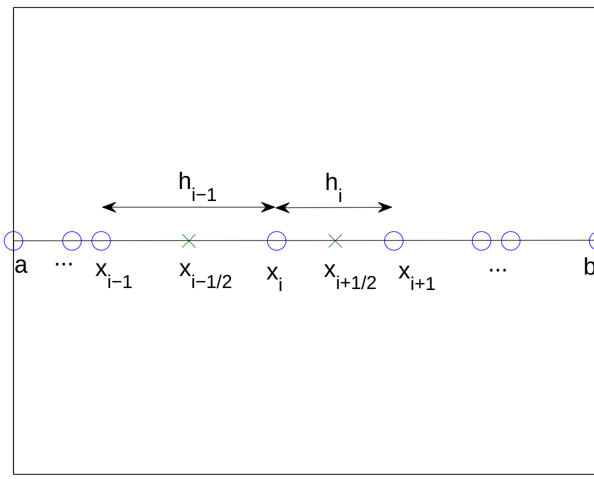
Πεπερασμένες διαφορές για το πρόβλημα δύο σημείων. Μη ομοιόμορφος διαμερισμός

Έστω το πρόβλημα δύο σημείων:

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

αλλά τώρα θα θεωρήσουμε ένα διαμερισμό του $[a,b]$, $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$, που δεν θα είναι κατ' ανάγκην ομοιόμορφος. (Ξεκινάμε την αρίθμηση από 1 και όχι από 0, γιατί έχουμε υπ' όψιν την υλοποίηση της μεθόδου στο Matlab.) Θα συμβολίζουμε $h_i := x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $U_i \approx u(x_i)$, και με $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$, τα μέσα των διαστημάτων $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$, αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Τότε η προσέγγιση της δευτέρας παραγώγου $u''(x_i)$ μπορεί να γίνει ως εξής:

$$u''(x_i) = (u'(x_i))' \approx \frac{u'(x_{i+1/2}) - u'(x_{i-1/2})}{\frac{h_i}{2} + \frac{h_{i-1}}{2}} \approx \frac{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}}}{\frac{1}{2}(h_i + h_{i-1})}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του (1):

$$-\frac{2}{h_{i-1} + h_i}\Big(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}}\Big) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 2, 3, \ldots, N, \tag{2}$$

όπου λόγω των συν. συνθηκών Dirichlet έχουμε ότι $U_1 = U_{N+1} = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με $\frac{h_{i-1}+h_i}{2}$ και καταλήγουμε στην ισοδύναμη μορφή:

$$-\frac{1}{h_{i-1}}\, U_{i-1} + \Big(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} + \frac{h_{i-1} + h_i}{2} q(x_i)\Big)\, U_i - \frac{1}{h_i}\, U_{i+1} = \frac{h_{i-1} + h_i}{2} f(x_i), \quad i = 2, 3, \ldots, N, \tag{3}$$

με $U_1 = U_{N+1} = 0$. (Παρατηρήστε ότι αν $h_i = h := (b-a)/N$, για $i = 1, 2, \ldots, N$, δηλαδή για ομοιόμορφο διαμερισμό, καταλήγουμε στο γνωστό μας σχήμα πεπερασμένων διαφορών με τρία σημεία.)

Η (3) μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή του ακόλουθου γραμμικού συστήματος:

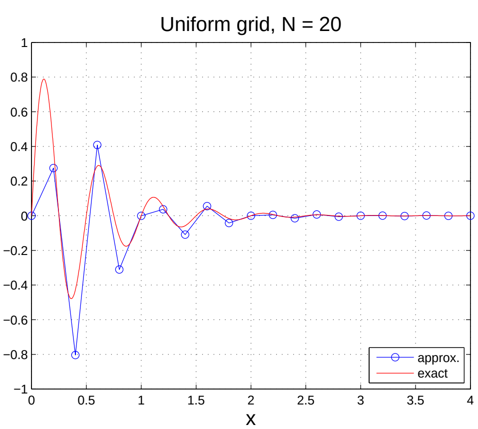
$$AU = F, \tag{4}$$

όπου

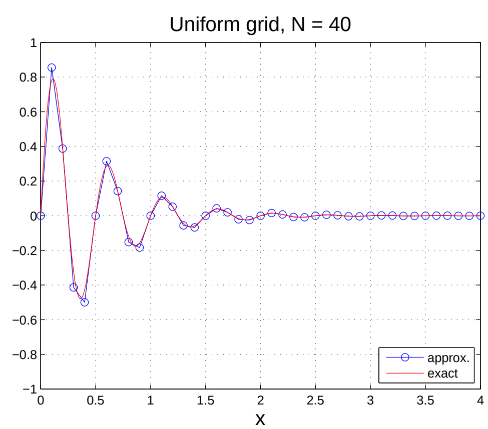
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{h_1+h_2}{2} q(x_2) & -\frac{1}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{h_2+h_3}{2} q(x_3) & -\frac{1}{h_3} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} + \frac{h_{N-1}+h_N}{2} q(x_N) \end{pmatrix},$$

$U = (U_2, \dots, U_N)^T$ και $F = \left(\frac{h_1+h_2}{2} f(x_2), \frac{h_2+h_3}{2} f(x_3), \dots, \frac{h_{N-1}+h_N}{2} f(x_N) \right)^T$.

Ένα παράδειγμα. Θεωρούμε το πρόβλημα (1) με $[a,b] = [0,4]$, $q(x) := 4$, $f(x) := 16\pi\Big(\pi \sin(4\pi x) + \cos(4\pi x)\Big)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Τότε η ακριβής λύση είναι: $u(x) = \sin(4\pi x)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Στο Σχήμα 2 απεικονίζονται η ακριβής λύση και η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για ομοιόμορφο διαμερισμό του [0,4] α) με $N = 20$ και β) με $N = 40$ υποδιαστήματα. Από το Σχήμα 2 μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η λύση έχει πιο απότομες μεταβολές στο διάστημα [0,2] από ότι στο [2,4]. Ως εκ τούτου πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο (ομοιόμορφος) διαμερισμός μας να είναι αρκετά λεπτός έτσι ώστε να να περιέχονται αρκετά σημεία στο διάστημα που η λύση μας μεταβάλλεται απότομα. Μια άλλη στρατηγική όμως είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν μη ομοιόμορφο διαμερισμό και να αναδιατάξουμε έτσι τους κόμβους ώστε να περιέχονται περισσότερα σημεία στο «δύσκολο» διάστημα και λιγότερα στο «εύκολο».



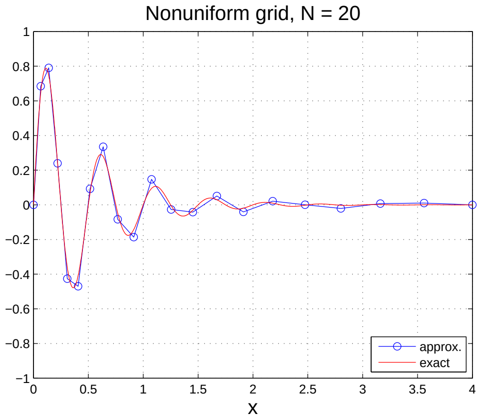
(α) Ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 20$



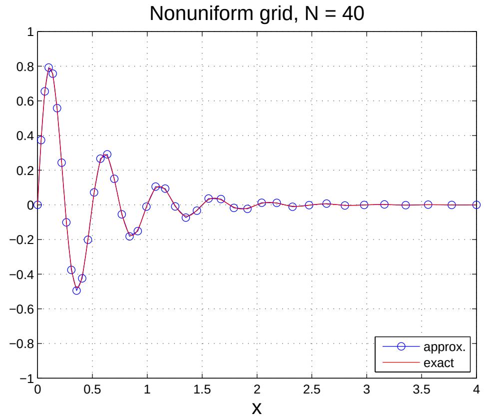
(β) Ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 40$

Σχήμα 2

Στο Σχήμα 3 απεικονίζονται η ακριβής λύση και η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για μη ομοιόμορφο διαμερισμό του [0,4], α) με $N = 20$ και β) με $N = 40$ υποδιαστήματα. Παρατηρήστε ότι οι κόμβοι πυκνώνουν όσο πλησιάζουμε προς το αριστερό άκρο του διαστήματος, και ότι τώρα η προσέγγισή μας είναι πολύ καλύτερη από την αντίστοιχη για ομοιόμορφο διαμερισμό.



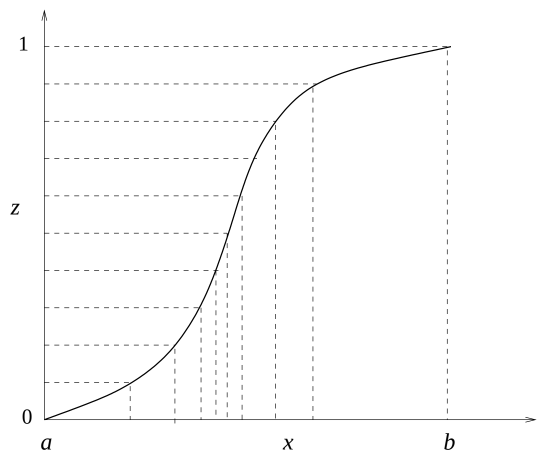
(α) Μη ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 20$



(β) Μη ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 40$

Σχήμα 3

Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε έναν μη ομοιόμορφο διαμερισμό είναι ο ακόλουθος: Ξεκινάμε από έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του [0,1], $z_i = (i-1)h$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$, όπου $h = 1/N$, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε κάποια κατάλληλη απεικόνιση $\mathcal{X}(z)$ για να ορίσουμε τους κόμβους του μη ομοιόμορφου διαμερισμού $x_i := \mathcal{X}(z_i)$. Στο Σχήμα 4 έχουμε τοποθετήσει στον κάθετο άξονα τα z και στον οριζόντιο τα x. (Με αυτή την επιλογή αξόνων στο Σχήμα 4 ουσιαστικά δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης $z = \mathcal{X}^{-1}(x)$.) Παρατηρήστε πώς τα ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία στον άξονα των z αντιστοιχούν στα μη ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία του άξονα των x.

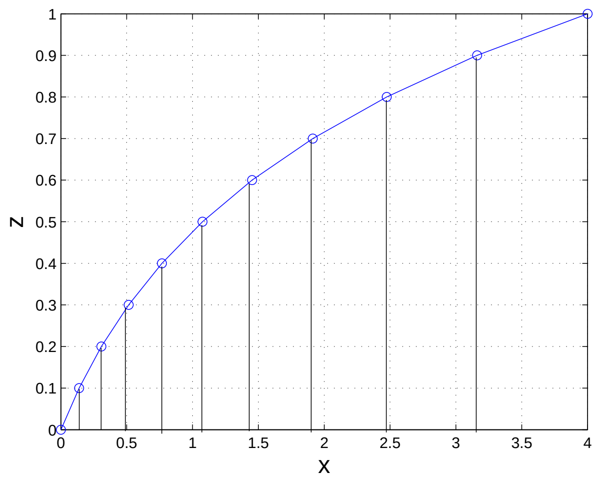


Σχήμα 4

Στο παράδειγμά μας ενδιαφερόμαστε να πυκνώσουμε τα σημεία του διαμερισμού μας προς το αριστερό άκρο του διαστήματος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί π.χ. με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(z) = (b-a)\frac{\mathrm{e}^{kz}-1}{\mathrm{e}^{k}-1} + a, \quad z \in [0,1], \tag{5}$$

όπου k είναι κατάλληλος συντελεστής ενίσχυσης της πύκνωσης. Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται ο τρόπος λειτουργίας της (5) στο διάστημα [0,4] με $k = 2$.



Σχήμα 5

Τα αποτελέσματα που χρησιμοποιήθηκαν για το Σχήμα 2, έχουν επίσης προκύψει με $k = 2$. Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται το σχετικό σφάλμα

$$\mathcal{E}(N) = \frac{\max\limits_{1\leq i\leq N+1} |u(x_i) - U_i|}{\max\limits_{1\leq i\leq N+1} |u(x_i)|},$$

για ομοιόμορφο και μη ομοιόμορφο διαμερισμό του [0,4] σε N υποδιαστήματα.

$\mathcal{E}(N)$	Ομοιόμορφος διαμ.	Μη ομοιόμορφος διαμ.
$N = 20$	0.8811	0.0890
$N = 40$	0.1174	0.0230
$N = 80$	0.0283	0.0056
$N = 160$	0.0071	0.0014

Παρατήρηση: Φυσικά αυτό που θα επιθυμούσε κανείς από μια αριθμητική μέθοδο θα ήταν η επιλογή των κόμβων να γίνεται «αυτόματα» και χωρίς εκ των προτέρων γνώση της συμπεριφοράς της λύσης. Κάτι τέτοιο ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του μαθήματος. Τέτοια θέματα αντιμετωπίζονται στο μάθημα ΤΕΜ349: *Υπολογιστικές Μέθοδοι Αυτόματης Αναδιαμέρισης*.

Ασκήσεις:

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα Matlab (ή Fortran ή C) που να επιλύει το πρόβλημα (1) και χρησιμοποιήστε το με τα δεδομένα του παραδείγματος για να επιβεβαιώσετε τα παραπάνω αποτελέσματα.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1, \quad x \in [a,b] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

όπου ε είναι δεδομένη θετική σταθερά. Βρείτε την ακριβή λύση του προβλήματος. Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική επίλυση του (6), και υλοποιήστε την σε ένα πρόγραμμα Matlab (ή Fortran ή C). Τρέξτε το πρόγραμμά σας για $\varepsilon = 0.5$ και $\varepsilon = 0.005$ χρησιμοποιώντας διαμερισμούς με 125, 250 και 500 υποδιαστήματα. Πιστεύετε ότι είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσετε μη ομοιόμορφο διαμερισμό; Αν, ναί, πραγματοποιήστε το.