Τετάρτη 13 Οκτωβρίου 2010

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ -u'(a) + \sigma_1 u(a) = 0, \\ \quad u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

όπου $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, και $\sigma_1,\ \sigma_2 \geq 0$. Θεωρήστε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = (b-a)/N$ (δηλαδή οι κόμβοι είναι $x_i = a + (i-1)h,\ i = 1,2,\ldots,N+1$). Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει προσεγγίσεις U_i των τιμών $u(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N+1$, με τη συνήθη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Δηλαδή, θα πρέπει να υπολογίζετε τις προσεγγίσεις U_i με το αριθμητικό σχήμα:

$$\begin{cases} \frac{2}{h^2}(U_1 - U_2) + 2\frac{\sigma_1}{h}U_1 + q(x_1)U_1 = f(x_1) \\ -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 2,3,\ldots,N, \\ -\frac{2}{h^2}(U_N - U_{N+1}) + 2\frac{\sigma_2}{h}U_{N+1} + q(x_{N+1})U_{N+1} = f(x_{N+1}). \end{cases} \tag{2}$$

Για το προγράμμά σας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) ή Matlab. (Οι q, f και η ακριβής λύση u θα πρέπει να δίνονται ως υποπρογράμματα function και να καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα όταν είναι απαραίτητο.) Το προγράμμά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζει και να εκτυπώνει στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου $\max_{1\leq i\leq N+1}|U_i - u(x_i)|$.

(α′) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για τα ακόλουθα δεδομένα: $[a,b] = [0,4]$, $q(x) = \pi\Big[1 - \cos(\frac{\pi}{2}x)\Big]$, $f(x) = (\frac{\pi}{4} + 1)\,\pi x \sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}x\sin(\pi x) - \pi$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 2\pi$, οπότε $u(x) = x\sin(\frac{\pi}{2}x) - 1$.

(β′) Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 25, 50, 100, 200, 400$ υποδιαστήματα.

(γ′) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για $N = 100$ υποδιαστήματα, και αποθηκεύστε το σχήμα σε ένα (postscript) αρχείο.

(δ′) Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου.
Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω $\mathcal{E}(N)$ το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για N υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$, όπου η σταθερά h είναι ανεξάρτητη του h και του N. Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

(ε′) Σχεδιάστε ένα $\log\log$ γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των υποδιαστημάτων N, με $N = 25, 50, 100, 200, 400$.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

όπου $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα Matlab (ή Fortran ή C) που να επιλύει το πρόβλημα (3) για μη ομοιόμορφο διαμερισμό ακολουθώντας τις οδηγίες στις αντίστοιχες σημειώσεις. Χρησιμοποιήστε στο πρόγραμμά σας τα δεδομένα του παραδείγματος των σημειώσεων, δηλαδή $[a,b] = [0,4]$, $q(x) := 4$, $f(x) := 16\pi\Big(\pi \sin(4\pi x) + \cos(4\pi x)\Big)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Τότε η ακριβής λύση είναι: $u(x) = \sin(4\pi x)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Με το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναπαραγάγετε τα αποτελέσματα των σημειώσεων.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1, \quad x \in [a,b] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

όπου ε είναι δεδομένη θετική σταθερά. Βρείτε την ακριβή λύση του προβλήματος. Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική επίλυση του (4), και υλοποιήστε την σε ένα πρόγραμμα Matlab (ή Fortran ή C). Τρέξτε το πρόγραμμά σας για $\varepsilon = 0.25$ και $\varepsilon = 0.0025$ χρησιμοποιώντας διαμερισμούς με 25, 50, 100, 200 και 400 υποδιαστήματα. Πιστεύετε ότι είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσετε μη ομοιόμορφο διαμερισμό; Αν, ναί, πραγματοποιήστε το.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν αποφασίσετε να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων, τότε οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Τρίτη 16/10.