Ασκήσεις

1. Έστω μια συνάρτηση $f \in C^4[a,b]$, ένα σημείο $x \in (a,b)$ και βήμα $h > 0$, τέτοιο ώστε $x \pm 3h \in [a,b]$. Θεωρήστε τα πηλίκα διαφορών

$$\delta_{h,r} f(x) = \frac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2},$$

και

$$\delta_{h,l} f(x) = \frac{2f(x) - 5f(x-h) + 4f(x-2h) - f(x-3h)}{h^2}.$$

Αποδείξτε ότι είναι προσεγγίσεις της $f''(x)$ και ότι ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$|\delta_{h,r} f(x) - f''(x)| \le \frac{11}{12}\, h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

και

$$|\delta_{h,l} f(x) - f''(x)| \le \frac{11}{12}\, h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2. Αποδείξτε ότι το πηλίκο διαφορών

$$\frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h},$$

είναι μια προσέγγιση της $f'(x)$ τάξεως $O(h^4)$, και ότι το πηλίκο διαφορών

$$\frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h},$$

είναι μια προσέγγιση της $f''(x)$ τάξεως $O(h^3)$.

3. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα πηλίκα διαφορών ειναι προσεγγίσεις της $f'''(x)$.

$$\frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3},$$

και

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}.$$

Ποιά προσέγγιση είναι ακριβέστερη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. Δίνεται το πρόβλημα δύο σημείων

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 \le x \le 1,$$
$$u'(0) = u(0), \quad u(1) = 0,$$

όπου f, q συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1] με $q(x) \geq q_0 > 0$, $x \in [0,1]$. Έστω U_j οι προσεγγίσεις των $u(x_j)$ στα σημεία $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, όπου $(N+1)h = 1$, που δίνει η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}\Big(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\Big) + q(x_j)U_j &= f(x_j), \quad 1 \leq j \leq N, \\ \frac{1}{h}\Big(U_1 - U_0\Big) - U_0 &= \frac{1}{2}\, h\, \Big(q(x_0)U_0 - f(x_0)\Big), \end{aligned}$$

όπου $U_{N+1} = 0$. Προσδιορίστε τον $(N+1) \times (N+1)$ πίνακα των συντελεστών A και το δεύτερο μέλος $b \in \mathbb{R}^{N+1}$ του συστήματος $AU = b$, $U = (U_0, U_1, \ldots, U_N)^T$ αυτής της μεθόδου, και αποδείξτε ότι ο A αντιστρέφεται. Δικαιολογήστε τη μορφή της εξίσωσης για τον άγνωστο U_0.

5. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a,b] \\ u(a) = A, \quad u(b) = B. \end{cases}$$

Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/(N+1)$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Γράψτε τη μέθοδό σας σε μορφή συστήματος $AU = F$, (όπου U_i είναι η προσέγγιση της $u(x_i)$) και προσδιορίστε τον πίνακα των συντελεστών A και το δεύτερο μέλος F του συστήματος. Υπολογίστε τις προσεγγίσεις για το πρόβλημα με $[a,b] = [0,3]$, $q(x) = 2$, $f(x) = x^2 + x - 1$, συν. συνθ. $u(0) = 0$, $u(3) = 9/2$, και βήμα διαμερισμού $h = 1$.

6. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & \forall t \in [0, T_f],\ x \in [a,b], \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in [a,b], \\ u(t,a) = u(t,b), & \forall t \in [0, T_f], \end{cases} \tag{1}$$

και την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος για ομοιόμορφο διαμερισμό τόσο του $[0, T_f]$ σε N_t υποδιαστήματα μήκους $\tau = T_f/N_t$ το καθένα, όσο και του $[a,b]$ σε $N_x + 1$ υποδιαστήματα μήκους $h = (b-a)/(N_x+1)$ το καθένα. Αποδείξτε ότι για το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου:

$$T_i^n = \frac{u(t_n, x_i) - u(t_{n-1}, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1})}{h^2},$$

ισχύει

$$|T_i^n| \leq \frac{\tau}{2}\, \|u_{tt}\|_\infty + \frac{h^2}{12}\, \|u_{xxxx}\|_\infty, \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N_t,\ i = 1, 2, \ldots, N_x.$$

7. Θεωρήστε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών Crank-Nicolson για το πρόβλημα (1) στα ίδια σημεία με αυτά της προηγούμενης άσκησης. Το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} T_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u(t_n, x_i) - u(t_{n-1}, x_i)}{\tau} &- \frac{1}{2}\, \frac{u(t_{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t_{n+1}, x_i) + u(t_{n+1}, x_{i-1})}{h^2} \\ &- \frac{1}{2}\, \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1})}{h^2}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$|T_i^{n+\frac{1}{2}}| \le \frac{\tau^2}{12}\,\|u_{ttt}\|_\infty + \frac{h^2}{12}\,\|u_{xxxx}\|_\infty, \quad \forall n = 0,1,\ldots,N_t,\ i = 1,2,\ldots,N_x.$$

8. Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για το ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & \forall t \in [0,T_f],\ x \in [0,1], \\ u(0,x) = 1, & \forall x \in [0,1], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,0) \text{ και } \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = -u(t,1) & \forall t \in [0,T_f], \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler για την εξίσωση και κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της παραγώγου στις συνοριακές συνθήκες.

9. Απαντήστε στο προηγούμενο ερώτημα αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε προς τα εμπρός διαφορά για την προσέγγιση της παραγώγου για τη συνοριακή συνθήκη στο $x=0$ και προς τα πίσω διαφορά για την προσέγγιση της παραγώγου για τη συνοριακή συνθήκη στο $x=1$.

10. Θεωρήστε την εξίσωση $u_t = xu_{xx}$, $0<x<1/2$, $0<t<T_f$, με συνοριακές συνθήκες $u(t,0)=0$ και $u_x(t,1/2) = -\frac{1}{2}u(t,1/2)$, $t \in [0,T_f]$, και αρχική συνθήκη $u(0,x) = x(1-x)$, $0 \le x \le 1/2$. Έστω x_i, $i = 0,1,\ldots,N_x+1$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0,1/2]$ με βήμα $h = \frac{1}{2(N_x+1)}$, και t_n, $n = 0,1,\ldots,N_t$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0,T_f]$ με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$. Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε όλες τις παραγώγους ως προς x, με κεντρικές διαφορές, τότε η απλούστερη *άμεση* μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης u στο σημείο (t_n,x_i) μπορεί να γραφεί ως

$$U_i^{n+1} = i\mu h U_{i-1}^n + (1-2i\mu h)U_i^n + i\mu h U_{i+1}^n, \quad i = 1,\ldots,N_x$$

και

$$U_{N_x+1}^{n+1} = 2(N_x+1)\mu h U_{N_x}^n + \left[1 - 2(N_x+1)\mu h - (N_x+1)\mu h^2\right] U_{N_x+1}^n,$$

για $n = 0,1,\ldots,N_t$, όπου $\mu := \tau/h^2$.

11. Αποδείξτε το Λήμμα 6.2 (σελ. 78) στις σημειώσεις του κ. Γεωργούλη (σελ. 81 στη νεότερη έκδοση).

12. Αποδείξτε το Θεώρημα 6.3 (σελ. 78) στις σημειώσεις του κ. Γεωργούλη (σελ. 81 στη νεότερη έκδοση).

13. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + au_x = 0$, με $a > 0$ σταθερό, όπου $0 < t < T_f$ και $x \in \mathbb{R}$, με αρχική συνθήκη $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_j = jh$, $j = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία στον άξονα των x και t_n, $n = 0,1,\ldots,N_t$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0,T_f]$ με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

    (α′) Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε τη χρονική παράγωγο με προς τα εμπρός διαφορά και τη χωρική παράγωγο με κεντρική διαφορά με βήμα $2h$, τότε η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης u στο σημείο (t_n,x_j) είναι

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

όπου $\nu := \frac{\tau}{h}$ είναι ο αριθμός Courant. Χρησιμοποιήστε ανάλυση von Neumann για να αποδείξετε ότι η μέθοδος αυτή είναι ασταθής. Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;

(β′) Αν αντικαταστήσουμε στο παραπάνω σχήμα την τιμή U_j^n με τον μέσο όρο $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$, καταλήγουμε στο σχήμα Lax-Friedrichs:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{a\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό; Μελετήστε την ευστάθεια της μεθόδου.

14. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + \frac{1}{2}u_x = 0$, $0 \le t \le 4$, $0 \le x \le 4$, με αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} 10x(2-x), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

και συνοριακή συνθήκη $u(t,0) = 0$, $0 \le t \le 4$.

(α′) Σχεδιάστε στιγμιότυπα της ακριβούς λύσης για τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$.

(β′) Διατυπώστε τη μέθοδο upwind, για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα τ και χωρικό βήμα h, για το πρόβλημα αυτό και υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης στα σημεία $x = 1, 2, 3, 4$ στον τελικό χρόνο $t = 4$, παίρνοντας:
(i) $h = 1$ και $\tau = 1$.
(ii) $h = 1$ και $\tau = 2$.
(iii) $h = 1$ και $\tau = 4$.
Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;

15. Λύστε τις ασκήσεις **6.5**, **6.12**, (σελίδες 274-275) του βιβλίου: Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης.

16. Λύστε τις ασκήσεις **7.3**, **7.4**, **7.12** (σελίδες 320-321) του βιβλίου: Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης.