ΕΜ292: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Ακαδ. έτος 2008–2009

Δευτέρα 22 Δεκεμβρίου 2008

4η Εργαστηριακή Άσκηση

Η άσκηση αυτή έχει ως θέμα την αριθμητική επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία (με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις) του προβλήματος δύο σημείων

$$-(pu')' + qu = f, \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. (Οι p, q, f είναι δεδομένες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν: $p \in C^1[a,b]$, $q, f \in C[a,b]$, με $p(x) > 0$ και $q(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$.) Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να μελετήσετε το πρόγραμμα `FEM1D` (για το οποίο μιλήσαμε στο εργαστήριο, και μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα του μαθήματος), να το καταλάβετε, και να το τροποποιήσετε έτσι ώστε να μην τυπώνει πληροφορίες και δεδομένα που δεν σας είναι απολύτως απαραίτητα. Στη συνέχεια θα πρέπει να γράψετε μία ακόμα συνάρτηση (m-file) που να υπολογίζει την ακριβή λύση του προβλήματος και να τροποποιήσετε το κυρίως πρόγραμμα `fem1d.m` έτσι ώστε να υπολογίζει την L^2-νόρμα του σφάλματος. Υπενθυμίζεται ότι αν u είναι η ακριβής λύση του προβλήματος και u_h η προσεγγιστική, τότε η L^2-νόρμα του σφάλματος $\varepsilon := u - u_h$ υπολογίζεται ως

$$\|\varepsilon\| := \Big[\sum_{j=1}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Big(\varepsilon(x)\Big)^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}},$$

όπου $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b$ είναι ο διαμερισμός του $[a,b]$ που χρησιμοποιήσατε για να λύσετε το πρόβλημα. (Παρατηρήστε ότι για να υπολογίσετε το σφάλμα θα πρέπει να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα αριθμητικά, οπότε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα του τραπεζίου σε καθένα από τα υποδιαστήματα.)

Δοκιμάστε το πρόγραμμα `FEM1D` στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $[a,b] = [0,1]$, συνοριακές συνθήκες: $u(0) = u(1) = 0$, $p(x) = q(x) = x+1$, $f(x) = (\pi^2 x + \pi^2 - 1)\,\mathrm{e}^x \sin \pi x - (2x+3)\,\pi \mathrm{e}^x \cos \pi x$. Για το πρόβλημα αυτό η ακριβής λύση είναι: $u(x) = \mathrm{e}^x \sin \pi x$.

2. $[a,b] = [0,1]$, συνοριακές συνθήκες: $u'(0) = 0$, $u(1) = 1 - \mathrm{e}$, $p(x) = x$, $q(x) = x+1$, $f(x) = (x^2 + x - 1) - 16\pi^2 x\,\mathrm{e}^x \cos 4\pi x - 4\pi\,(2x+1)\,\mathrm{e}^x \sin 4\pi x$. Για το πρόβλημα αυτό η ακριβής λύση είναι: $u(x) = x - \mathrm{e}^x \cos 4\pi x$.

Για καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις βεβαιωθείτε υπολογιστικά ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου στην L^2-νόρμα είναι 2. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την ακριβή και την προσεγγιστική λύση για διαμερισμό της επιλογής σας. Γράψτε μια έκθεση στην οποία θα πρέπει να παρουσιάζονται τα σχήματα αυτά, πίνακες με τα αποτελέσματά σας (δηλ. το πλήθος των στοιχείων που χρησιμοποιήσατε, το βήμα h, και το αντίστοιχο σφάλμα), και σχολιασμός τους.