 Ακαδ. έτος 2008–2009

Τρίτη 9 Δεκεμβρίου 2008

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς

$$u_t + 2u_x = 0, \quad x \in [a,b],\ t \in [0,T_f] \tag{1}$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = u_0(x) = \mathrm{e}^{-\beta\left(x-\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

και *περιοδικές* συνθήκες στα άκρα. Γράψτε δύο προγράμματα που να υλοποιούν τις μεθόδους upwind και Lax-Wendroff, αντίστοιχα. Θεωρήστε ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα $\tau := T_f/N_t$ για το διάστημα $[0,T_f]$ (δηλ. $t_n = (n-1)\tau,\ n = 1,2,\ldots,N_t+1$), και ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h := (b-a)/N_x$ για το διάστημα $[a,b]$ (δηλ. $x_i = a+(i-1)h,\ i = 1,2,\ldots,N_x+1$). Τα προγράμματά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζουν και να εκτυπώνουν στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου στην τελευταία χρονική στιγμή, δηλ. το $\max_{1\le i\le N_x+1} |U_i^{N_t+1} - u(T_f,x_i)|$.

1. Δοκιμάστε τα πρόγραμματά σας για τα ακόλουθα δεδομένα: $T_f = 1$, $[a,b] = [0,1]$, $\beta = 100$.

2. Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς παίρνοντας τον αριθμό Courant $\nu := \tau/h = 0.4$. (Πάρτε π.χ. $N_x = 40, 80, 160, 320$ και $N_t = 100, 200, 400, 800$, αντίστοιχα.

3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για $t = T_f$ για καθεμιά από τις δύο μεθόδους.

4. Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των δύο μεθόδων.

5. Δημιουργήστε ένα μικρό video που να παρουσιάζει την εξέλιξη στο χρόνο της ακριβούς και της υπολογιστικής λύσης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους.

6. Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα παίρνοντας την τιμή της παραμέτρου $\beta = 500$. Τι παρατηρείτε;

7. Δοκιμάστε τα προγράμματά σας και για διαφορετικές τιμές του ν, και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Την Τρίτη 16/12 κάθε ομάδα θα πρέπει να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη κατά προτίμηση) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους.