Τετάρτη 29 Οκτωβρίου 2008

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ -u'(a) + \sigma_1 u(a) = 0, \\ \ \ u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

όπου $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, και $\sigma_1,\ \sigma_2 \geq 0$. Θεωρήστε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = (b-a)/N$ (δηλαδή οι κόμβοι είναι $x_i = a + (i-1)h,\ i = 1,2,\ldots,N+1$). Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει προσεγγίσεις U_i των τιμών $u(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N+1$, με τη συνήθη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Δηλαδή, θα πρέπει να υπολογίζετε τις προσεγγίσεις U_i με το αριθμητικό σχήμα:

$$\begin{cases} \frac{2}{h^2}(U_1 - U_2) + 2\frac{\sigma_1}{h}U_1 + q(x_1)U_1 = f(x_1) \\ -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 2,3,\ldots,N, \\ -\frac{2}{h^2}(U_N - U_{N+1}) + 2\frac{\sigma_2}{h}U_{N+1} + q(x_{N+1})U_{N+1} = f(x_{N+1}). \end{cases} \tag{2}$$

Για το πρόγραμμά σας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) ή Matlab. (Οι q, f και η ακριβής λύση u θα πρέπει να δίνονται ως υποπρογράμματα function και να καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα όταν είναι απαραίτητο.) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζει και να εκτυπώνει στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου $\max_{1\leq i\leq N+1} |U_i - u(x_i)|$.

(α′) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για τα ακόλουθα δεδομένα: $[a,b] = [0, 5/2]$, $q(x) = 8 - 2\pi \sin \pi x$, $f(x) = 8 + (8+\pi^2)x\cos \pi x - \pi x \sin 2\pi x$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = (5\pi)/2$, οπότε $u(x) = x\cos \pi x + 1$.

(β′) Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 25, 50, 100, 200, 400$ υποδιαστήματα.

(γ′) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για $N = 100$ υποδιαστήματα, και αποθηκεύστε το σχήμα σε ένα (postscript) αρχείο.

(δ′) Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου.
Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω $\mathcal{E}(N)$ το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για N υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$, όπου η σταθερά h είναι ανεξάρτητη του h και του N. Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

(ε′) Σχεδιάστε ένα $\log\log$ γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των υποδιαστημάτων N, με $N = 25, 50, 100, 200, 400$.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad x \in [a,b], \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a,b] \\ u(t,a) = u(t,b) = 0, \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα Matlab ή Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) που να υλοποιεί τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορων Crank-Nicolson για την επίλυση του προβλήματος για $t \in [0, T_f]$.

(α′) Θεωρήστε $[a,b] = [0,1]$ και $u_0(x) := \begin{cases} 2x, & x \in [0,1/2] \\ 2-2x, & x \in (1/2,1] \end{cases}$. Υπολογίστε την αναλυτική λύση του προβλήματος.

(β′) Για $T_f = 1$ και για ομοιόμορφους διαμερισμούς της επιλογής σας υπολογίστε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος με τη βοήθεια του προγράμματός σας.

(γ′) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της στο χρόνο T_f και σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.

(δ′) Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Είναι προτιμότερο να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Την Τετάρτη 5/11 κάθε ομάδα θα πρέπει να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη κατά προτίμηση) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους.