1η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υλοποιεί τη μέθοδο του Euler για την επίλυση του (1) για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ με βήμα $h = (b-a)/n$. Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίζετε τις προσεγγίσεις $y^n \approx y(t^n)$ ως εξής:

$$\begin{cases} y^0 = y_0, \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Γράψτε, επίσης, ένα πρόγραμμα που να υλοποιεί την ακόλουθη αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του (1),

$$\begin{cases} z^0 = y_0, \\ z^{n+1} = z^n + \frac{h}{2}\Big[f(t^n, z^n) + f\Big(t^{n+1}, z^n + hf(t^n, z^n)\Big)\Big], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{3}$$

Για τα προγράμματά σας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) ή Matlab. (Η $f(t, y)$ και η ακριβής λύση $y(t)$ θα πρέπει να δίνονται ως υποπρογράμματα function και να καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα όταν είναι απαραίτητο.) Τα προγράμματά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζουν και να εκτυπώνουν στην οθόνη τα σφάλματα των μεθόδων (2) και (3), αντίστοιχα,

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - y(t^n)| \quad \text{και} \quad \max_{0 \le n \le N} |z^n - y(t^n)|.$$

1. Θεωρήστε το π.α.τ.

$$\begin{cases} y' = y + 4\pi \cos(4\pi t)\, y, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (α΄) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση και βρείτε την αναλυτικά.

   (β΄) Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης με τις μεθόδους (2) και (3), καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 64, 128, \ldots, 4096, 8192$ υποδιαστήματα.

   (γ΄) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της με τις μεθόδους (2) και (3) για $N = 512$ υποδιαστήματα, και αποθηκεύστε το σχήμα σε ένα (postscript) αρχείο.

   (δ΄) Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των μεθόδων (2) και (3).
   Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω $\mathcal{E}(N)$ το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για N υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$, όπου η σταθερά h είναι ανεξάρτητη του h και του N. Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

(ε′) Σχεδιάστε ένα $\log\log$ γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων N για τις μεθόδους (2) και (3), με $N = 64, 128, \ldots, 4096, 8192$.

2. Προσδιορίστε τη λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} y' = 2\,|t|\,y, \quad t \in [-1,1], \\ y(-1) = 1/e. \end{cases}$$

(α′) Αποδείξτε ότι $y \in C^1[-1,1]$, αλλά ότι η y'' δεν υπάρχει στο $t = 0$. Άρα $y \notin C^2[-1,1]$.

(β′) Επαναλάβατε τα ερωτήματα (β′)-(ε′) της προηγούμενης άσκησης για $N = 16, 32, \ldots, 1024, 2048$ υποδιαστήματα.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 1-4/4, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Την Τρίτη 1/4 κάθε ομάδα θα πρέπει να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη κατά προτίμηση) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους.