ΕΜ211: Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ακαδ. έτος 2010–2011

Τετάρτη 30 Μαρτίου 2011

Ασκήσεις - 4ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, αντίστοιχα, και $T, L : V \to W$ γραμμικές απεικονίσεις.

   (α′) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, η $\lambda T + L$ είναι γραμμική απεικόνιση από τον V στον W.

   (β′) Αν $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})$, τότε $T = L$.

   (γ′) Αν $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$, τότε ο $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ είναι ένας πίνακας $m \times n$.

   (δ′) $\mathcal{M}(T + L; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

   (ε′) Ο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διαν. χώρος.

   (ϛ′) $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(W, V)$.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W, Z είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, αντίστοιχα, $T : V \to W$, $L : W \to Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και A, B πίνακες.

   (α′) $\mathcal{M}(LT; \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})\,\mathcal{M}(L; \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

   (β′) $\mathcal{M}(T(u); \mathcal{C}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})\,\mathcal{M}(u; \mathcal{B})$, $\forall u \in V$.

   (γ′) $\mathcal{M}(L(v); \mathcal{C}) = \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})\,\mathcal{M}(v; \mathcal{C})$, $\forall v \in W$.

   (δ′) $\mathcal{M}(I_V; \mathcal{B}) = I$.

   (ε′) $\mathcal{M}(T^2; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \Big(\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})\Big)^2$.

   (ϛ′) Αν $A^2 = I$, τότε $A = I$ ή $A = -I$.

   (ζ′) Αν $A^2 = \mathbb{O}$, τότε $A = \mathbb{O}$, όπου $\mathbb{O}$ είναι ο μηδενικός πίνακας.

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, αντίστοιχα, $T : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση και A, B πίνακες.

   (α′) $\Big(\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})\Big)^{-1} = \mathcal{M}(T^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

   (β′) Η T είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.

   (γ′) Ο $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^5$.

   (δ′) Ο $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν $n = m$.

   (ε′) Αν $AB = I$, τότε οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

   (ϛ′) Ο A πρέπει να είναι τετραγωνικός πίνακας για να αντιστρέφεται.

4. Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ οι συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T;\mathcal{B},\mathcal{C})$ για την απεικόνιση $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1)$.

5. Έστω V ένας δ.χ. με βάση $\mathcal{B} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ και $x_0 = 0$. Τότε από γνωστό θεώρημα υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T: V \to V$ με $T(x_i) = x_i + x_{i-1}$ για $i = 1,\ldots,n$. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T;\mathcal{B})$.

6. Έστω $g(x) = 3 + x$,
$$T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ με } T(f) = f'g + 2f,$$
και
$$L : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \text{ με } L(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b).$$
Έστω $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ και $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Υπολογίστε τους πίνακες $\mathcal{M}(L;\mathcal{B},\mathcal{C})$, $\mathcal{M}(T;\mathcal{B})$ και $\mathcal{M}(LT;\mathcal{B},\mathcal{C})$. Στη συνέχεια ελέγξτε ότι $\mathcal{M}(LT;\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathcal{M}(L;\mathcal{B},\mathcal{C})\,\mathcal{M}(T;\mathcal{B})$.

7. Θεωρήστε τα στοιχεία $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ με $v_1 = (5,3)$ και $v_2 = (3,2)$, καθώς και τα στοιχεία $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ με $w_1 = (-1,1,1)$, $w_2 = (1,-1,1)$, $w_3 = (1,1,-1)$. Δείξτε ότι:
(α) Η $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^2$.
(β) Η $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.
(γ) Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $\mathcal{M}(T;\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τις τιμές $T(1,1)$ και $T(2,-3)$.

8. Έστω V δ.χ. και $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Αποδείξτε ότι $T^2 = T_0$ (όπου T_0 είναι η μηδενική απεικόνιση, δηλ. $T_0(u) = 0,\ \forall u \in V$) αν και μόνο αν $\operatorname{im}(T) \subseteq \ker(T)$.

9. Βρείτε γραμμικές απεικονίσεις $T, L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $TL = T_0$ (όπου T_0 είναι η μηδενική απεικόνιση, δηλ. $T_0(u) = (0,0),\ \forall u \in \mathbb{R}^2$) αλλά $LT \neq T_0$. Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να βρείτε πίνακες A, B τέτοιους ώστε $AB = 0$ αλλά $BA \neq 0$.

10. Έστω V, W, Z δ.χ. και $T : V \to W$, $L : W \to Z$ γραμμικές απεικονίσεις.
α) Αν η LT είναι 1-1, αποδείξτε ότι και η T είναι 1-1. Είναι η L 1-1;
β) Αν η LT είναι επί, αποδείξτε ότι και η L είναι επί. Είναι η T επί;
γ) Αν οι L και T είναι 1-1 και επί, αποδείξτε ότι και η LT είναι 1-1 και επί.

11. Αν $\mathcal{B} = \{(2,5), (-1,-3)\}$ και $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2\}$ είναι δύο βάσεις του $\mathbb{R}^2$ βρείτε τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$.

12. Αν $\mathcal{B} = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\}$ και $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ είναι δύο βάσεις του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ βρείτε τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$.

13. Έστω $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ με $T(p) = p'$. Αν $\mathcal{B} = \{1, x\}$ και $\mathcal{B}' = \{1 + x, 1 - x\}$, υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T;\mathcal{B})$, τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$, και χρησιμοποιήστε τους για να βρείτε τον πίνακα $\mathcal{M}(T;\mathcal{B}')$.