

### Ασκήσεις - 3ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι  $V$  και  $W$  είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης (επί ενός σώματος  $\mathbb{K}$ ) και  $L$  μια απεικόνιση από τον  $V$  στον  $W$ .

(α') Αν η  $L$  είναι γραμμική, τότε διατηρεί τα αθροίσματα και τα βαθμωτά γινόμενα.

(β') Αν  $L(x + y) = L(x) + L(y)$ , τότε η  $L$  είναι γραμμική.

(γ') Η  $L$  είναι 1-1 αν και μόνον αν  $\ker(L) = \{0\}$ .

(δ') Αν η  $L$  είναι γραμμική, τότε  $L(0_V) = 0_W$ .

(ε') Αν η  $L$  είναι γραμμική, τότε  $\dim(\ker(L)) + \dim(\text{im}(L)) = \dim(W)$ .

(ς') Αν η  $L$  είναι γραμμική, τότε απεικονίζει γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του  $V$  πάνω σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του  $W$ .

(ζ') Αν  $L, T : V \rightarrow W$  είναι γραμμικές απεικονίσεις και συμφωνούν σε μια βάση του  $V$ , τότε  $L = T$ .

(η') Δεδομένων  $x_1, x_2 \in V$  και  $y_1, y_2 \in W$ , υπάρχει γραμμική απεικόνιση  $L : V \rightarrow W$ , τέτοια ώστε  $L(x_1) = y_1$  και  $L(x_2) = y_2$ .

2. Για τις ακόλουθες απεικονίσεις  $L$  αποδείξτε ότι είναι γραμμικές και βρείτε βάσεις των  $\ker(L)$  και  $\text{im}(L)$ . Στη συνέχεια υπολογίστε τις διαστάσεις των  $\ker(L)$  και  $\text{im}(L)$ , και επιβεβαιώστε ότι ισχύει το Θεώρημα της διάστασης. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα κριτήρια για να ελέγξετε αν η  $L$  είναι 1-1 και επί.

(α')  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_3)$ .

(β')  $L : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $L \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(γ')  $L : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ,  $L(p(x)) = xp(x) + p'(x)$ .

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ . Δείξτε ότι η  $L$  είναι 1-1 αν και μόνο αν  $ad \neq bc$ . Γενικότερα, αποδείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  με

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)$$

είναι 1-1 αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  είναι διάφορη του μηδενός.

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $L(x, y, z, w) = (x - y, x + y + z, y + w)$ . Βρείτε μια βάση του πυρήνα  $\ker(L)$ , καθώς και τη διάσταση και μια βάση της εικόνας  $\text{im}(L)$ .

5. Έστω  $V$  και  $W$  δ.χ. και  $L : V \rightarrow W$  γραμμική απεικόνιση.
- (α) Αποδείξτε ότι η  $L$  είναι 1-1 αν και μόνο αν απεικονίζει γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του  $V$  σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του  $W$ .
- (β) Υποθέστε ότι η  $L$  είναι 1-1 και έστω  $S \subseteq V$ . Αποδείξτε ότι το  $S$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν το  $L(S)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
6. Έστω  $V$  ένας δ.χ. επί ενός σώματος  $\mathbb{K}$  και μια γραμμική απεικόνιση  $T : V \rightarrow V$ . Δείξτε ότι  $T^2 = 0 \Leftrightarrow \text{im}(T) \subset \ker(T)$ .
7. Έστω  $V$  ένας δ.χ. επί ενός σώματος  $\mathbb{K}$  και μια γραμμική απεικόνιση  $T : V \rightarrow V$ . Δείξτε ότι  $\ker(T) \cap \text{im}(T) = \{0\} \Leftrightarrow (T^2(v) = 0 \Rightarrow T(v) = 0)$ .