

Ασκήσεις - 2ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.
 - (α') Αν V είναι ένας δ.χ. και W ένα υποσύνολο του V που είναι επίσης δ.χ., τότε το W είναι υπόχωρος του V .
 - (β') Το κενό σύνολο είναι υπόχωρος κάθε δ.χ.
 - (γ') Αν V είναι ένας δ.χ., $V \neq \{0\}$, τότε ο V περιέχει έναν υπόχωρο W τέτοιο ώστε $W \neq V$.
 - (δ') Η τομή οποιωνδήποτε δύο υποσυνόλων ενός δ.χ. V είναι ένας υπόχωρος του V .
 - (ε') Το μηδενικό διάνυσμα σ' ένα δ.χ. V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε συνόλου μη μηδενικών στοιχείων του V .
 - (ς') Το $\text{span}(\emptyset)$ είναι το \emptyset .
 - (ζ') Αν S είναι ένα υποσύνολο ενός δ.χ. V , τότε το $\text{span}(S)$ ισούται με την τομή όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το S .
 - (η') Αν S είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, τότε κάθε στοιχείο του S είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων στοιχείων του S .
 - (θ') Κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.
 - (ι') Το \emptyset είναι γραμμικά εξαρτημένο.
 - (ια') Υποσύνολα γραμμικά εξαρτημένων συνόλων είναι γραμμικά εξαρτημένα.
 - (ιβ') Υποσύνολα γραμμικά ανεξάρτητων συνόλων είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
 - (ιγ') Κάθε δ.χ. που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μία βάση.
 - (ιδ') Κάθε δ.χ. έχει μια πεπερασμένη βάση.
 - (ιε') Ένας δ.χ. δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία βάσεις.
 - (ις') Αν ένας δ.χ. έχει μια πεπερασμένη βάση, τότε κάθε βάση θα περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.
 - (ιζ') Η διάσταση του $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ είναι n .
 - (ιη') Αν το S παράγει τον δ.χ. V , τότε κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S κατά μοναδικό τρόπο.
 - (ιθ') Κάθε υπόχωρος ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση.
 - (ιχ') Αν V είναι ένας δ.χ. με $\dim(V) = n$, τότε ο V έχει ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης 0 και ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης n .
2. Δείξτε ότι το $\{u, v\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνον αν το u ή το v είναι πολλαπλάσιο το ένα του άλλου.

3. Δώστε ένα παράδειγμα τριών γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων του \mathbb{R}^3 τέτοιων ώστε κανένα από τα τρία να μην είναι πολλαπλάσιο του άλλου.
4. Βρείτε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διαγώνιων πινάκων που να παράγουν τον χώρο των 2×2 διαγώνιων πινάκων.
5. Εξετάστε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι βάση του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:
- (α') $\{2x^2 - x - 1, -2x^2 + x + 2, 4x^2 - 2x + 1\}$.
- (β') $\{x^2 + 2x + 1, x^2 + 3, x^2 + x\}$.
- (γ') $\{-2x^2 + 4x + 1, -x^2 + 3x - 2, 6x^2 - 12x - 3\}$.
6. Τα πολυώνυμα $x^3 - 2x^2 + 1$, $4x^2 - x + 3$, και $3x - 2$ παράγουν τον $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
7. Είναι το $\{(1, 4, -6), (1, 5, 8), (2, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
8. Αν V είναι ένας δ.χ. και $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ είναι βάση του V , τότε δείξτε ότι και το σύνολο $\{u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \dots, u_n - u_{n-1}\}$ είναι βάση του V .
9. Τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$, $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ αποτελούν μια βάση του \mathbb{R}^4 . Βρείτε τη μοναδική αναπαράσταση ενός τυχαίου διανύσματος $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ ως γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων u_1, u_2, u_3 και u_4 .
10. α) Αποδείξτε ότι αν W_1 και W_2 είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός δ.χ. V , τότε ο $W_1 + W_2$ είναι υπόχωρος πεπερ. διάστασης του V , και $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.
β) Έστω W_1 και W_2 είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός δ.χ. V , και $V = W_1 + W_2$. Αποδείξτε ότι $V = W_1 \oplus W_2$ αν και μόνον αν $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.
11. Έστω $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ και } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V και βρείτε τις διαστάσεις των $W_1, W_2, W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2$.

12. Δείξτε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του $V = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι του V και βρείτε μια βάση τους:
- $W_1 = \{A \in V \mid A \text{ συμμετρικός}\}$.
- $W_2 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{11} = a_{22} = a_{33}\}$.