Πέμπτη 24 Φεβρουαρίου 2011

Ασκήσεις - 1ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

    (α′) Κάθε διανυσματικός χώρος (δ.χ.) περιέχει ένα μηδενικό διάνυσμα.

    (β′) Ένας δ.χ. μπορεί να περιέχει περισσότερα του ενός μηδενικά διανύσματα.

    (γ′) Σε κάθε δ.χ. V επί ενός σώματος $\mathbb{K}$, $ax = bx \Rightarrow a = b$, όπου $a, b \in \mathbb{K}$, $x \in V$.

    (δ′) Σε κάθε δ.χ. V επί ενός σώματος $\mathbb{K}$, $ax = ay \Rightarrow x = y$, όπου $a \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$.

    (ε′) Κάθε στοιχείο του $\mathbb{K}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

    (ϛ′) Ένας πίνακας $m \times n$ έχει m στήλες και n γραμμές.

    (ζ′) Στο $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ μπορούμε να προσθέσουμε μόνο πολυώνυμα ίδιου βαθμού.

    (η′) Αν f και g είναι πολυώνυμα βαθμού n, τότε το $f + g$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

    (θ′) Αν f είναι πολυώνυμο βαθμού n και $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, τότε το λf είναι πολυώνυμο βαθμού n.

    (ι′) Ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ μηδενικού βαθμού.

    (ια′) Δύο πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το S είναι ίσες αν και μόνον αν έχουν τις ίδιες τιμές σε κάθε στοιχείο του S.

2. Έστω $S = \{0, 1\}$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το S, $f = g$ και $f + g = h$, όπου $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 1 + 4x - 2x^2$ και $h(x) = 5^x + 1$.

3. Έστω V το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Αν (a_1, a_2) και (b_1, b_2) είναι στοιχεία του V και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τις πράξεις

$$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2) \quad \text{και} \quad \lambda \boxdot (a_1, a_2) = (\lambda\, a_1, a_2).$$

    Είναι ο V με τις πράξεις αυτές διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. Θεωρήστε το σύνολο των *θετικών* πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}_+$ και ορίστε τις πράξεις της πρόσθεσης ($\boxplus$) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\boxdot$) ως εξής:

$$x \boxplus y = xy \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \lambda \boxdot x = x^\lambda \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+.$$

    Δείξτε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}_+, \boxplus, \boxdot)$ αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$.

5. Έστω $V = \{(a_1, \ldots, a_n) :\ a_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Αν εφοδιάσουμε τον V με τις πράξεις της (κατά συντεταγμένη) πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, τότε είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος των *πραγματικών* αριθμών;

6. Έστω $V = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Αν εφοδιάσουμε τον V με τις πράξεις της (κατά συντεταγμένη) πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, τότε είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος των *μιγαδικών* αριθμών;

7. Έστω $V = \{(a_1, a_2) : \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Αν (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

και

$$\lambda \boxdot (a_1, a_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{αν } \lambda = 0, \\ \left(\lambda\, a_1, \frac{a_2}{\lambda}\right) & \text{αν } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Είναι ο V με τις πράξεις αυτές διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. Είναι το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ένας υπόχωρος του $C(\mathbb{R})$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

9. Αν V είναι ο χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, δείξτε ότι το $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του δ.χ. V επί του $\mathbb{R}$.

10. Αποδείξτε ότι αν W_1 και W_2 είναι υπόχωροι ενός δ.χ. V, τότε ο $W_1 + W_2$ είναι ένας υπόχωρος του V που περιέχει τα W_1 και W_2. Επιπλέον, αποδείξτε ότι είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει τα W_1 και W_2.

11. Δείξτε ότι το $\mathbb{R}^n$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $W_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_n = 0\}$ και $W_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0\}$.

12. Ένας πίνακας A λέγεται αντισυμμετρικός αν $A^T = -A$. (Προφανώς ένας αντισυμμετρικός πίνακας είναι τετραγωνικός.) Δείξτε ότι το σύνολο W_1 όλων των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων είναι ένας υπόχωρος του $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Αν W_2 είναι ο υπόχωρος όλων των συμμετρικών πινάκων του $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, δείξτε ότι $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

13. Δείξτε ότι αν

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε το $\mathrm{span}(\{M_1, M_2, M_3\})$ είναι το σύνολο όλων των συμμετρικών 2×2 πινάκων.

14. Δείξτε ότι αν S_1 και S_2 είναι υποσύνολα ενός δ.χ. V, τέτοια ώστε $S_1 \subseteq S_2$, τότε $\mathrm{span}(S_1) \subseteq \mathrm{span}(S_2)$. Ειδικότερα, αν $S_1 \subseteq S_2$ και $\mathrm{span}(S_1) = V$, τότε $\mathrm{span}(S_2) = V$.

15. Δείξτε ότι αν S_1 και S_2 είναι τυχαία υποσύνολα ενός δ.χ. V, τότε $\mathrm{span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{span}(S_1) + \mathrm{span}(S_2)$.

16. Έστω ότι S_1 και S_2 είναι υποσύνολα ενός δ.χ. V. Αποδείξτε ότι $\mathrm{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{span}(S_1) \cap \mathrm{span}(S_2)$. Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο το $\mathrm{span}(S_1 \cap S_2)$ και το $\mathrm{span}(S_1) \cap \mathrm{span}(S_2)$ είναι ίσα και ένα παράδειγμα στο οποίο είναι διαφορετικά.