Ασκήσεις - 8ο Φυλλάδιο

1. Σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt για το υποσύνολο S του χώρου με εσωτερικό γινόμενο V. Στη συνέχεια βρείτε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier του δεδομένου διανύσματος ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.
   (1) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,3,3)\}$ και $x = (1,1,2)$.
   (2) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ και $x = (1,0,1)$.
   (3) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2\}$ και $f(x) = 1 + x$. (Εδώ $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.)

2. Έστω $V = \mathbb{C}^3$, και $S = \{(1,0,i),(1,2,1)\}$. Βρείτε το $S^\perp$.

3. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και W ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V. Αν $x \notin W$, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα $y \in V$, τέτοιο ώστε $y \in W^\perp$, αλλά $\langle x, y\rangle \neq 0$.

4. Έστω A μιγαδικός $n \times n$ πίνακας του οποίου οι στήλες αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο. Αποδείξτε ότι $AA^* = I$.

5. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου, S, S_0 υποσύνολα του V και W ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
   α) Αν $S_0 \subseteq S$, τότε $S^\perp \subseteq S_0^\perp$.
   β) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$ και, επομένως, $\mathrm{span}(S) \subseteq (S^\perp)^\perp$.
   γ) $W = (W^\perp)^\perp$.
   δ) $V = W \oplus W^\perp$.

6. (Ο τύπος του Parseval.) Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει:
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle\, \overline{\langle y, x_i\rangle}.$$

7. (Η ανισότητα του Bessel.) Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του V. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in V$ ισχύει:
$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

8. Για καθένα από τους ακόλουθους χώρους εσωτερικού γινομένου και τελεστές $T \in \mathcal{L}(V)$, υπολογίστε το συζυγή τελεστή T^* στο δοσμένο στοιχείο του V.
   α) $V = \mathbb{R}^2$, $T(a,b) = (2a + b, a - 3b)$, $x = (3,5)$.
   β) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $T(f) = f' + 3f$, $f(x) = 4 - x + 3x^2$. (Εδώ $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.)

9. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν $L_1 = T + T^*$ και $L_2 = TT^*$, δείξτε ότι $L_1 = L_1^*$ και $L_2 = L_2^*$.

10. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$. Δείξτε ότι $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in V$ αν και μόνο αν $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$.

11. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αποδείξτε ότι $\operatorname{im}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$.

12. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

    α) $\ker(T^*T) = \ker(T)$. (Συμπεράνατε ότι $\operatorname{rank}(T^*T) = \operatorname{rank}(T)$.)

    β) $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$. (Συμπεράνατε ότι $\operatorname{rank}(TT^*) = \operatorname{rank}(T)$.)