ΕΜ211: Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ακαδ. έτος 2009–2010

Πέμπτη 6 Μαΐου 2010

Ασκήσεις - 7ο Φυλλάδιο

1. Για καθέναν από τους ακόλουθους πίνακες βρείτε πίνακα P τέτοιον ώστε $P^{-1}AP = J$, όπου J είναι πίνακας σε κανονική μορφή Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & -18 \\ -4 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -6 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Θεωρήστε το χώρο $C([0,1])$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, για κάθε $f, g \in C([0,1])$. Αν $f(t) = t$ και $g(t) = \mathrm{e}^t$ υπολογίστε τα $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ και $\|f+g\|$. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

3. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{B}$ μια βάση του. Αποδείξτε ότι αν $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$, τότε $y = 0$.

4. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $x, y \in V$ *ορθογώνια* (δηλ. $\langle x, y\rangle = 0$). Αποδείξτε ότι: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

5. Αποδείξτε τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, δηλ. ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

6. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$ τέτοιος ώστε $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in V$. Αποδείξτε ότι ο T είναι 1-1.

7. Έστω $V = C([0,1])$ και ορίζουμε $\langle f, g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)\,dt$. Είναι εσωτερικό γινόμενο στον V;