ΕΜ211: Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ Ακαδ. έτος 2009–2010

Πέμπτη 15 Απριλίου 2010

Ασκήσεις - 5ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

   (α′) Κάθε γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο διάστασης n έχει n διαφορετικές ανα δύο ιδιοτιμές.

   (β′) Αν ένας πραγματικός πίνακας έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε έχει άπειρο πλήθος ιδιοδιανυσμάτων.

   (γ′) Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας που δεν έχει κανένα ιδιοδιάνυσμα.

   (δ′) Κάθε δύο ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (ε′) Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών ενός γραμμικού τελεστή T είναι επίσης ιδιοτιμή του T.

   (ϛ′) Γραμμικοί τελεστές σε χώρους άπειρης διάστασης δεν έχουν ιδιοτιμές.

   (ζ′) Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ είναι όμοιος μ′ ένα διαγώνιο πίνακα αν και μόνον αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{K}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A.

   (η′) Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

   (ϑ′) Το άθροισμα δύο ιδιοδιανυσμάτων ενός γραμμικού τελεστή T είναι πάντα ιδιοδιάνυσμα του T.

   (ι′) Κάθε γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο διάστασης n που έχει λιγότερες από n διαφορετικές ανα δύο ιδιοτιμές δεν διαγωνιοποιείται.

   (ια′) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

   (ιβ′) Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός γραμμικού τελεστή T, τότε κάθε στοιχείο του E_λ είναι ιδιοδιάνυσμα του T.

   (ιγ′) Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι δύο ιδιοτιμές ενός γραμμικού τελεστή T, τότε $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

   (ιδ′) Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ και $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A. Αν Q είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η i-στήλη είναι το x_i, $i = 1, \dots, n$, τότε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ είναι διαγώνιος πίνακας.

   (ιε′) Κάθε διαγωνιοποιήσιμος γραμμικός τελεστής σε έναν μη μηδενικό γραμμικό χώρο έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.

2. Θεωρήστε τον τελεστή $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $T(p)(x) = p(x) + xp'(x)$. Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του T, και μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε ο πίνακας $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$ να είναι διαγώνιος.

3. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης V.
   α) Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται αν και μόνον αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του T.
   β) Έστω ότι ο T αντιστρέφεται. Δείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του T^{-1}.

4. α) Αποδείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

   β) Αποδείξτε ότι ο ορισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός γραμμικού τελεστή σε ένα γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V είναι ανεξάρτητος της επιλογής της βάσης του V.

5. Θεωρήστε τον τελεστή $L : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, με $L(A) = A^T$.

   α) Αποδείξτε ότι ο L είναι γραμμικός τελεστής στον $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   β) Αποδείξτε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του L είναι ± 1.

   γ) Χαρακτηρίστε τους πίνακες που αποτελούν ιδιοδιανύσματα του τελεστή L, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1 και -1, αντίστοιχα.

6. Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι ο A διαγωνιοποιείται αν και μόνον αν ο A^T διαγωνιοποιείται.

7. Έστω T ένας γραμμικός και αντιστρέψιμος τελεστής σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης V. Αποδείξτε ότι ο T διαγωνιοποιείται αν και μόνον αν ο T^{-1} διαγωνιοποιείται.

8. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης V επί ενός σώματος $\mathbb{K}$. Αποδείξτε ότι αν $p(t) \in \mathbb{P}(\mathbb{K})$ και x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε $p(T)(x) = p(\lambda)x$.

9. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι πίνακες A διαγωνιοποιούνται. Αν ναι, βρείτε ένα πίνακα Q τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι διαγώνιος.

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι τελεστές T διαγωνιοποιούνται. Αν ναι, βρείτε μια βάση $\mathcal{B}$ τέτοια ώστε ο πίνακας $\mathcal{M}(T;\mathcal{B})$ να είναι διαγώνιος.

    (α′) $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ με $T(p) = p' + p''$.

    (β′) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $T(p)(x) = p(0) + p(1)(x + x^2)$.

    (γ′) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.

    (δ′) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$.

11. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2 επί του σώματος $\mathbb{C}$. Έστω T γραμμικός τελεστής του V που έχει μια ιδιοτιμή λ με γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Δείξτε ότι ο πίνακας του T ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι ο λI_2.

12. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, υπολογίστε τον A^n για κάθε θετικό ακέραιο n.