

Ασκήσεις - 4ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις \mathcal{B}, \mathcal{C} , αντίστοιχα, και $T, L : V \rightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις.

(α') Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, η $\lambda T + L$ είναι γραμμική απεικόνιση από τον V στον W .

(β') Αν $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})$, τότε $T = L$.

(γ') Αν $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$, τότε ο $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ είναι ένας πίνακας $m \times n$.

(δ') $\mathcal{M}(T + L; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

(ε') Ο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διαν. χώρος.

(ς') $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(W, V)$.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W, Z είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, αντίστοιχα, $T : V \rightarrow W$, $L : W \rightarrow Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και A, B πίνακες.

(α') $\mathcal{M}(LT; \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathcal{M}(L; \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

(β') $\mathcal{M}(T(u); \mathcal{C}) = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathcal{M}(u; \mathcal{B})$, $\forall u \in V$.

(γ') $\mathcal{M}(L(v); \mathcal{C}) = \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathcal{M}(v; \mathcal{C})$, $\forall v \in W$.

(δ') $\mathcal{M}(I_V; \mathcal{B}) = I$.

(ε') $\mathcal{M}(T^2; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \left(\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \right)^2$.

(ς') Αν $A^2 = I$, τότε $A = I$ ή $A = -I$.

(ζ') Αν $A^2 = \mathbb{O}$, τότε $A = \mathbb{O}$, όπου \mathbb{O} είναι ο μηδενικός πίνακας.

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V, W είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης με βάσεις \mathcal{B}, \mathcal{C} , αντίστοιχα, $T : V \rightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση και A, B πίνακες.

(α') $\left(\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \right)^{-1} = \mathcal{M}(T^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

(β') Η T είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.

(γ') Ο $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφος με τον \mathbb{R}^5 .

(δ') Ο $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν $n = m$.

(ε') Αν $AB = I$, τότε οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

(ς') Ο A πρέπει να είναι τετραγωνικός πίνακας για να αντιστρέφεται.

4. Έστω \mathcal{B}, \mathcal{C} οι συνήθεις βάσεις των \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 , αντίστοιχα. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ για την απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1)$.

5. Έστω V ένας δ.χ. με βάση $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $x_0 = 0$. Τότε από γνωστό θεώρημα υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T : V \rightarrow V$ με $T(x_i) = x_i + x_{i-1}$ για $i = 1, \dots, n$. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$.

6. Έστω $g(x) = 3 + x$,

$$T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ με } T(f) = f'g + 2f,$$

και

$$L : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } L(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b).$$

Έστω $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ και $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Υπολογίστε τους πίνακες $\mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$ και $\mathcal{M}(LT; \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Στη συνέχεια ελέγξτε ότι $\mathcal{M}(LT; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(L; \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathcal{M}(T; \mathcal{B})$.

7. Έστω V δ.χ. και $T : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Αποδείξτε ότι $T^2 = T_0$ (όπου T_0 είναι η μηδενική απεικόνιση, δηλ. $T_0(u) = 0, \forall u \in V$) αν και μόνο αν $\text{im}(T) \subseteq \ker(T)$.

8. Βρείτε γραμμικές απεικονίσεις $T, L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $TL = T_0$ (όπου T_0 είναι η μηδενική απεικόνιση, δηλ. $T_0(u) = (0, 0), \forall u \in \mathbb{R}^2$) αλλά $LT \neq T_0$. Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να βρείτε πίνακες A, B τέτοιους ώστε $AB = 0$ αλλά $BA \neq 0$.

9. Έστω V, W, Z δ.χ. και $T : V \rightarrow W, L : W \rightarrow Z$ γραμμικές απεικονίσεις.

α) Αν η LT είναι 1-1, αποδείξτε ότι και η T είναι 1-1. Είναι η L 1-1;

β) Αν η LT είναι επί, αποδείξτε ότι και η L είναι επί. Είναι η T επί;

γ) Αν οι L και T είναι 1-1 και επί, αποδείξτε ότι και η LT είναι 1-1 και επί.

10. Αν $\mathcal{B} = \{(2, 5), (-1, -3)\}$ και $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2\}$ είναι δύο βάσεις του \mathbb{R}^2 βρείτε τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} .

11. Αν $\mathcal{B} = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\}$ και $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ είναι δύο βάσεις του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ βρείτε τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} .

12. Έστω $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ με $T(p) = p'$. Αν $\mathcal{B} = \{1, x\}$ και $\mathcal{B}' = \{1 + x, 1 - x\}$, υπολογίστε τον πίνακα $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$, τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από τη βάση \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} , και χρησιμοποιήστε τους για να βρείτε τον πίνακα $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}')$.