ΕΜ211: Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ Ακαδ. έτος 2009–2010

Πέμπτη 25 Φεβρουαρίου 2010

Ασκήσεις - 2ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

   (α′) Αν V είναι ένας δ.χ. και W ένα υποσύνολο του V που είναι επίσης δ.χ., τότε το W είναι υπόχωρος του V.

   (β′) Το κενό σύνολο είναι υπόχωρος κάθε δ.χ.

   (γ′) Αν V είναι ένας δ.χ., $V \neq \{0\}$, τότε ο V περιέχει έναν υπόχωρο W τέτοιο ώστε $W \neq V$.

   (δ′) Η τομή οποιωνδήποτε δύο υποσυνόλων ενός δ.χ. V είναι ένας υπόχωρος του V.

   (ε′) Το μηδενικό διάνυσμα σ′ ένα δ.χ. V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε συνόλου μη μηδενικών στοιχείων του V.

   (ϛ′) Το $\mathrm{span}(\emptyset)$ είναι το $\emptyset$.

   (ζ′) Αν S είναι ένα υποσύνολο ενός δ.χ. V, τότε το $\mathrm{span}(S)$ ισούται με την τομή όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το S.

   (η′) Αν S είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, τότε κάθε στοιχείο του S είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων στοιχείων του S.

   (ϑ′) Κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

   (ι′) Το $\emptyset$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

   (ια′) Υποσύνολα γραμμικά εξαρτημένων συνόλων είναι γραμμικά εξαρτημένα.

   (ιβ′) Υποσύνολα γραμμικά ανεξάρτητων συνόλων είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (ιγ′) Κάθε δ.χ. που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μία βάση.

   (ιδ′) Κάθε δ.χ.έχει μια πεπερασμένη βάση.

   (ιε′) Ένας δ.χ. δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία βάσεις.

   (ιϛ′) Αν ένας δ.χ. έχει μια πεπερασμένη βάση, τότε κάθε βάση θα περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

   (ιζ′) Η διάσταση του $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ είναι n.

   (ιη′) Αν το S παράγει τον δ.χ. V, τότε κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S κατά μοναδικό τρόπο.

   (ιϑ′) Κάθε υπόχωρος ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση.

   (κ′) Αν V είναι ένας δ.χ. με $\dim(V) = n$, τότε ο V έχει ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης 0 και ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης n.

2. Δείξτε ότι το $\{u, v\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνον αν το u η το v είναι πολλαπλάσιο το ένα του άλλου.

3. Δώστε ένα παράδειγμα τριών γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ τέτοιων ώστε κανένα από τα τρία να μην είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

4. Βρείτε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διαγώνιων πινάκων που να παράγουν τον χώρο των 2×2 διαγώνιων πινάκων.

5. Εξετάστε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι βάση του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

   (α′) $\{2x^2 - x - 1,\ -2x^2 + x + 2,\ 4x^2 - 2x + 1\}$.

   (β′) $\{x^2 + 2x + 1,\ x^2 + 3,\ x^2 + x\}$.

   (γ′) $\{-2x^2 + 4x + 1,\ -x^2 + 3x - 2,\ 6x^2 - 12x - 3\}$.

6. Τα πολυώνυμα $x^3 - 2x^2 + 1$, $4x^2 - x + 3$, και $3x - 2$ παράγουν τον $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Είναι το $\{(1, 4, -6),\ (1, 5, 8),\ (2, 1, 1)\ (0, 1, 0)\}$ γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. Αν V είναι ένας δ.χ. και $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ είναι βάση του V, τότε δείξτε ότι και το σύνολο $\{u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \ldots, u_n - u_{n-1}\}$ είναι βάση του V.

9. Τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$, $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$. Βρείτε τη μοναδική αναπαράσταση ενός τυχαίου διανύσματος $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ ως γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων u_1, u_2, u_3 και u_4.

10. α) Αποδείξτε ότι αν W_1 και W_2 είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός δ.χ. V, τότε ο $W_1 + W_2$ είναι υπόχωρος πεπερ. διάστασης του V, και $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.
    β) Έστω W_1 και W_2 είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός δ.χ. V, και $V = W_1 + W_2$. Αποδείξτε ότι $V = W_1 \oplus W_2$ αν και μόνον αν $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

11. Έστω $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ και } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

    Αποδείξτε ότι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V και βρείτε τις διαστάσεις των W_1, W_2, $W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2$.