Τρίτη 12 Μαΐου 2009

Ασκήσεις - 9ο Φυλλάδιο

Ορισμός. Έστω V ένας διαν. χώρος και W_1 ένας υπόχωρος του V. Μια απεικόνιση $T : V \to V$ λέγεται *προβολή* στον W_1 αν:

(α) Υπάρχει υπόχωρος W_2 τ.ω. $V = W_1 \oplus W_2$.

(β) Αν $x = x_1 + x_2$, όπου $x_1 \in W_1$ και $x_2 \in W_2$, τότε $T(x) = x_1$.

Στις ασκήσεις 1, 2 και 3, που ακολουθούν, θεωρήστε ότι ισχύει ο συμβολισμός του ορισμού.

1. Αποδείξτε ότι η προβολή T είναι γραμμική και ότι $W_1 = \{x : \ T(x) = x\}$.

2. Έστω V δ.χ., W_1 υπόχωρος του V και $T : V \to V$ προβολή στον W_1. Αποδείξτε ότι $W_1 = \mathrm{im}(T)$ και $W_2 = \ker(T)$.

3. Έστω V δ.χ., W_1 υπόχωρος του V και $T : V \to V$ προβολή στον W_1. Αποδείξτε ότι $T^2 = T$.

4. Αποδείξτε ότι αν V είναι δ.χ. και $T : V \to V$ γραμμική με $T^2 = T$, τότε η T είναι προβολή στον υπόχωρο $W_1 = \mathrm{im}(T)$.

5. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και W υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V. Αποδείξτε ότι αν η T είναι ορθογώνια προβολή στον W, τότε η $I - T$ είναι ορθογώνια προβολή στον $W^{\perp}$.

6. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T : V \to V$ προβολή. Δείξτε ότι αν η T είναι ορθογώνια προβολή, τότε $\|T(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in V$.
   Δώστε ένα παράδειγμα μιας προβολής T για την οποία η ανισότητα αυτή δεν ισχύει.

7. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T : V \to V$ ορθογώνια προβολή. Δείξτε ότι: $\|T(x)\| = \|x\| \iff x \in \mathrm{im}(T)$.

8. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αποδείξτε ότι ο T είναι κανονικός αν και μόνον αν $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$, $\forall x \in V$.

9. Θεωρήστε το χώρο $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με εσωτερικό γινόμενο
   $$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$
   Ορίζουμε $T : V \to V$ με $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.
   α) Αποδείξτε ότι ο T δεν είναι αυτοσυζυγής.
   β) Βρείτε τον πίνακα $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$, ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ και ελέγξτε αν είναι αυτοσυζυγής.

10. Έστω V ένας *μιγαδικός* χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$ *κανονικός*. Αποδείξτε ότι:

    α) Ο T είναι προβολή αν και μόνον αν κάθε ιδιοτιμή του T είναι 1 ή 0.

    β) $T^* = -T$ αν και μόνον αν κάθε ιδιοτιμή του T είναι φανταστικός αριθμός.

11. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $L : V \to V$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Αποδείξτε ότι αν $\langle x, L(x)\rangle = 0$ για κάθε $x \in V$, τότε $L = T_0$, όπου T_0 ο μηδενικός τελεστής.

12. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αποδείξτε ότι $T^*T = TT^* = I$ αν και μόνον αν $\|T(x)\| = \|x\|$, για κάθε $x \in V$.

13. Έστω V ένας *πραγματικός* χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αποδείξτε ότι ο V έχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του T με αντίστοιχες ιδιοτιμές που έχουν απόλυτη τιμή 1, αν και μόνον αν ο T είναι αυτοσυζυγής και $\|T(x)\| = \|x\|$, για κάθε $x \in V$.

14. Έστω A ένας μιγαδικός κανονικός ή πραγματικός συμμετρικός $n \times n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (όχι κατ' ανάγκην διακεκριμένες). Αποδείξτε ότι $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ και $\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$.

15. Έστω V ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές στο [0,1] και εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$. Έστω $h \in V$, και ορίζουμε $T : V \to V$ με $T(f) = hf$. Αποδείξτε ότι ο τελεστής T είναι ορθομοναδιαίος (δηλ. $T^*T = TT^* = I$) αν και μόνον αν $|h(t)| = 1$, για $t \in [0, 1]$.

16. Έστω $V = C([-1, 1])$ και θεωρήστε τον τελεστή $P : V \to V$ με

    $$(Pf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

    Αποδείξτε ότι ο P είναι γραμμικός και ότι είναι προβολή.