ΕΜ211: Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ακαδ. έτος 2008–2009

Πέμπτη 2 Απριλίου 2009

Ασκήσεις - 7ο Φυλλάδιο

1. Θεωρήστε το χώρο $C([0,1])$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, για κάθε $f,g \in C([0,1])$. Αν $f(t)=t$ και $g(t)=\mathrm{e}^t$ υπολογίστε τα $\langle f,g\rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ και $\|f+g\|$. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

2. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{B}$ μια βάση του. Αποδείξτε ότι αν $\langle x,y\rangle = 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$, τότε $y=0$.

3. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $x,y \in V$ *ορθογώνια* (δηλ. $\langle x,y\rangle = 0$). Αποδείξτε ότι: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

4. Αποδείξτε τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, δηλ. ότι για κάθε $x,y \in V$ ισχύει:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

5. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$ τέτοιος ώστε $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in V$. Αποδείξτε ότι ο T είναι 1-1.

6. Έστω $V = C([0,1])$ και ορίζουμε $\langle f,g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)\,dt$. Είναι εσωτερικό γινόμενο στον V;