Ασκήσεις - 6ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

   (α′) Υπάρχει γραμμικός τελεστής T που δεν έχει κανένα T–αναλλοίωτο υπόχωρο.

   (β′) Αν T είναι ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο πεπερασμένης διάστασης V και W είναι ένας T–αναλλοίωτος υπόχωρος του V, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T_W διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T.

   (γ′) Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο πεπερασμένης διάστασης V, και $x, y \in V$. Αν W είναι ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το x και W' είναι ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το y, και $W = W'$, τότε $x = y$.

   (δ′) Αν T είναι ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο πεπερασμένης διάστασης V, τότε για κάθε $x \in V$ ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το x είναι ο ίδιος με τον T-κυκλικό υπόχωρο που παράγεται από το $T(x)$.

   (ε′) Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο διάστασης n. Τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(t)$ βαθμού n τέτοιο ώστε $g(T) = T_0$, όπου T_0 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

   (ϛ′) Κάθε πολυώνυμο της μορφής $(-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάποιου γραμμικού τελεστή.

2. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο πεπερασμένης διάστασης V. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθοι υπόχωροι είναι T-αναλλοίωτοι:
   α) $\{0\}$ και V.
   β) $\ker(T)\}$ και $\mathrm{im}(T)$.
   γ) E_λ, για κάθε ιδιοτιμή λ του T.

3. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο V, και W είναι ένας T–αναλλοίωτος υπόχωρος του V. Αποδείξτε ότι ο W είναι $g(T)$–αναλλοίωτος για κάθε πολυώνυμο $g(t)$.

4. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο V. Αποδείξτε ότι η τομή οποιασδήποτε συλλογής T–αναλλοίωτων υπόχωρων του V είναι T–αναλλοίωτος υπόχωρος.

5. Για κάθε γραμμικό τελεστή T σε ένα διαν. χώρο V βρείτε μια βάση του T-κυκλικού υπόχωρου W, που παράγεται από το z:
   α) $V = \mathbb{R}^4$, $T(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + c, a + d)$, και $z = e_1$.
   β) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A^T$, και $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Στη συνέχεια υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T_W και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f(t)$ του T. Επιβεβαιώστε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T_W διαιρεί το $f(t)$.

6. Έστω διαν. χώρος V, $T \in \mathcal{L}(V)$, $0 \neq x \in V$ και W είναι ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το x. Για κάθε $y \in V$ αποδείξτε ότι $y \in W$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(t)$ τέτοιο ώστε $y = g(T)(x)$.

7. Έστω A ο $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$(-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k-1}t^{k-1} + t^k).$$

(*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο k, και αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή.)

8. Έστω πίνακας $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f(t) = t^2 + t + 1$. Δείξτε ότι $A^3 = I_2$.