

Ασκήσεις - 5ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.
 - (α') Κάθε γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο διάστασης n έχει n διαφορετικές ανα δύο ιδιοτιμές.
 - (β') Αν ένας πραγματικός πίνακας έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε έχει άπειρο πλήθος ιδιοδιανυσμάτων.
 - (γ') Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας που δεν έχει κανένα ιδιοδιάνυσμα.
 - (δ') Κάθε δύο ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
 - (ε') Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών ενός γραμμικού τελεστή T είναι επίσης ιδιοτιμή του T .
 - (ς') Γραμμικοί τελεστές σε χώρους άπειρης διάστασης δεν έχουν ιδιοτιμές.
 - (ζ') Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} είναι όμοιος μ' ένα διαγώνιο πίνακα αν και μόνον αν υπάρχει μια βάση του \mathbb{K}^n από ιδιοδιανύσματα του A .
 - (η') Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
 - (θ') Το άθροισμα δύο ιδιοδιανυσμάτων ενός γραμμικού τελεστή T είναι πάντα ιδιοδιάνυσμα του T .
 - (ι') Κάθε γραμμικός τελεστής σε ένα διαν. χώρο διάστασης n που έχει λιγότερες από n διαφορετικές ανα δύο ιδιοτιμές δεν διαγωνιοποιείται.
 - (ια') Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.
 - (ιβ') Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός γραμμικού τελεστή T , τότε κάθε στοιχείο του E_λ είναι ιδιοδιάνυσμα του T .
 - (ιγ') Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι δύο ιδιοτιμές ενός γραμμικού τελεστή T , τότε $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.
 - (ιδ') Έστω $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ και $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι μια βάση του \mathbb{K}^n από ιδιοδιανύσματα του A . Αν Q είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η i -στήλη είναι το x_i , $i = 1, \dots, n$, τότε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ είναι διαγώνιος πίνακας.
 - (ιε') Κάθε διαγωνιοποιήσιμος γραμμικός τελεστής σε έναν μη μηδενικό γραμμικό χώρο έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.
2. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης V .
 - α) Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται αν και μόνον αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του T .
 - β) Έστω ότι ο T αντιστρέφεται. Δείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του T^{-1} .
3. Αποδείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
4. Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης V επί ενός σώματος \mathbb{K} . Αποδείξτε ότι αν $p(t) \in \mathbb{P}(\mathbb{K})$ και x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , τότε $p(T)(x) = p(\lambda)x$.

5. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι πίνακες A διαγωνιοποιούνται. Αν ναι, βρείτε ένα πίνακα Q τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι διαγώνιος.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι τελεστές T διαγωνιοποιούνται. Αν ναι, βρείτε μια βάση \mathcal{B} τέτοια ώστε ο πίνακας $\mathcal{M}(T; \mathcal{B})$ να είναι διαγώνιος.

(α') $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ με $T(p) = p' + p''$.

(β') $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $T(p)(x) = p(0) + p(1)(x + x^2)$.

(γ') $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ με $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.

7. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2 επί του σώματος \mathbb{C} . Έστω T γραμμικός τελεστής του V που έχει μια ιδιοτιμή λ με γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Δείξτε ότι ο πίνακας του T ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι ο λI_2 .

8. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, υπολογίστε τον A^n για κάθε θετικό ακέραιο n .