Ασκήσεις - 3ο Φυλλάδιο

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρήστε ότι οι V και W είναι δ.χ. πεπερασμένης διάστασης (επί ενός σώματος $\mathbb{K}$) και L μια απεικόνιση από τον V στον W.

   (α΄) Αν η L είναι γραμμική, τότε διατηρεί τα αθροίσματα και τα βαθμωτά γινόμενα.

   (β΄) Αν $L(x+y) = L(x) + L(y)$, τότε η L είναι γραμμική.

   (γ΄) Η L είναι 1-1 αν και μόνον αν $\ker(L) = \{0\}$.

   (δ΄) Αν η L είναι γραμμική, τότε $L(0_V) = 0_W$.

   (ε΄) Αν η L είναι γραμμική, τότε $\dim(\ker(L)) + \dim(\mathrm{im}(L)) = \dim(W)$.

   (ϛ΄) Αν η L είναι γραμμική, τότε απεικονίζει γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V πάνω σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του W.

   (ζ΄) Αν $L,\ T : V \to W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και συμφωνούν σε μια βάση του V, τότε $L = T$.

   (η΄) Δεδομένων $x_1, x_2 \in V$ και $y_1, y_2 \in W$, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, τέτοια ώστε $L(x_1) = y_1$ και $L(x_2) = y_2$.

2. Για τις ακόλουθες απεικονίσεις L αποδείξτε ότι είναι γραμμικές και βρείτε βάσεις των $\ker(L)$ και $\mathrm{im}(L)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις διαστάσεις των $\ker(L)$ και $\mathrm{im}(L)$, και επιβεβαιώστε ότι ισχύει το Θεώρημα της διάστασης. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα κριτήρια για να ελέγξετε αν η L είναι 1-1 και επί.

   (α΄) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_3)$.

   (β΄) $L : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (γ΄) $L : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $L(p(x)) = xp(x) + p'(x)$.

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Δείξτε ότι η L είναι 1-1 αν και μόνο αν $ad \neq bc$. Γενικότερα, αποδείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

   είναι 1-1 αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ είναι διάφορη του μηδενός.

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με $L(x, y, z, w) = (x - y, x + y + z, y + w)$. Βρείτε μια βάση του πυρήνα $\ker(L)$, καθώς και τη διάσταση και μια βάση της εικόνας $\mathrm{im}(L)$.

5. Έστω V και W δ.χ. και $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση.

   (α) Αποδείξτε ότι η L είναι 1-1 αν και μόνο αν απεικονίζει γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του W.

   (β) Υποθέστε ότι η L είναι 1-1 και έστω $S \subseteq V$. Αποδείξτε ότι το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $T(S)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

6. Έστω V ένας δ.χ. επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ και μια γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$. Δείξτε ότι $T^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{im}(T) \subset \ker(T)$.

7. Έστω V ένας δ.χ. επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ και μια γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$. Δείξτε ότι $\ker(T) \cap \mathrm{im}(T) = \{0\} \Leftrightarrow (T^2(v) = 0 \Rightarrow T(v) = 0)$.