Τετάρτη 20 Απριλίου 2005

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε σε Fortran μια υπορουτίνα `MATRML(LDA,N,A,B,C)` που να υπολογίζει το γινόμενο δύο $n \times n$ πινάκων A και B και να το αποθηκεύει στον πίνακα C. (Το `LDA` είναι η πρωτεύουσα διάσταση του πίνακα˙ πρέπει `LDA`$\geq \max\{$`1,N`$\}$.) Δοκιμάστε την υπορουτίνα σας με τους 3×3 πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -0.3750 & 0.2500 & -0.3125 \\ 0.5000 & 0.0000 & 0.2500 \\ -1.0000 & 0.5000 & -0.5000 \end{pmatrix}$. (Τι συμπεραίνετε για τους πίνακες A και B;)

2. Γράψτε σε Fortran μια συνάρτηση `ANORM(LDA,N,A)` που να υπολογίζει την 1-νόρμα ενός $n \times n$ πίνακα A. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας στους πίνακες A και B του ερωτήματος 1. Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης $\mathrm{cond}_1(A)$ του πίνακα A, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. ($\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$.)

3. (Άσκηση Π3-4, FMM) Ο αντίστροφος ενός πίνακα A μπορεί να ορισθεί ως ένας πίνακας X του οποίου οι στήλες ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$Ax_j = e_j,$$

όπου e_j είναι η j–στή στήλη του μοναδιαίου πίνακα. Γράψτε μια υπορουτίνα με όνομα `INVERT` και παραμέτρους

`SUBROUTINE INVERT(NDIM, N, A, X, COND, IPVT, WORK)`,

η οποία δέχεται ως είσοδο έναν πίνακα A τάξης N και κατά την έξοδο δίνει έναν πίνακα X που είναι προσέγγιση του αντιστρόφου του A, καθώς και μια εκτίμηση του δείκτη κατάστασης (`COND`), και πληροφορίες για την οδήγηση (`IPVT`). Η υπορουτίνα σας θα πρέπει να καλεί μια φορά την `DECOMP` και N συνολικά φορές την `SOLVE`. Δεν θα πρέπει να προχωράτε στον υπολογισμό του X αν, μέσω της `DECOMP`, εκτιμάτε ότι ο A είναι (ακριβώς ή σχεδόν) μη αντιστρέψιμος.

   (α′) Γράψτε ένα κυρίως πρόγραμμα που θα καλεί την `INVERT` και θα υπολογίζει τον αντίστροφο ενός πίνακα A. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει ακόμα να καλεί την υπορουτίνα `MATRML` και τη συνάρτηση `ANORM`, των ερωτημάτων 1 και 2, για να υπολογίζει το γινόμενο του πίνακα A επί τον αντίστροφό του και την 1-νόρμα της διαφοράς $\|AA^{-1} - I\|_1$. (Φυσικά, αν οι πράξεις γίνονταν ακριβώς θα έπρεπε $\|AA^{-1} - I\|_1 = 0$.) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με τον πίνακα A του ερωτήματος 1.

   (β′) Ένα κλασσικό παράδειγμα πινάκων κακής κατάστασης είναι οι πίνακες Hilbert H_n, με στοιχεία $H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$, $i,j = 1,\ldots,n$. Υπολογίστε μέσω της `DECOMP` μια εκτίμηση του δείκτη κατάστασης των πινάκων Hilbert H_4, διάστασης 4×4, και H_5, διάστασης 5×5. Υπολογίστε με το πρόγραμμα του ερωτήματος 3α′ τους αντιστρόφους X και Y των H_4 και H_5, αντίστοιχα, καθώς και τις ποσότητες $\|H_4X - I\|_1$ και $\|H_5Y - I\|_1$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

   (γ′) Δοκιμάστε να υπολογίσετε τον αντίστροφο του 6×6 πίνακα Hilbert H_6.

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 16/5 - 20/5 σε ώρα που θα ανακοινωθεί στην ιστοσελίδα του μαθήματος.