

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Άσκηση εξοικείωσης με το MATLAB.

(α') Να γραφεί συνάρτηση στο MATLAB που να κατασκευάζει τριδιαγώνιους ($n \times n$) πίνακες της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}.$$

Η συνάρτηση πρέπει να δέχεται ως είσοδο τη διάσταση του πίνακα (n), καθώς και τα a , b , c , και να επιστρέφει τον τριδιαγώνιο πίνακα.

(β') Να γραφεί συνάρτηση στο Matlab που να κατασκευάζει τον τετραγωνικό ($n \times n$) πίνακα

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 10 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 10 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 10 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-m)^2 \end{array} \right),$$

όπου ο άνω αριστερά υποπίνακας $10I_m$ έχει διάσταση $m \times m$ (φυσικά πρέπει $m \leq n$).

Η συνάρτηση πρέπει να δέχεται ως είσοδο τα m και n και να επιστρέφει τον πίνακα.

(γ') Κατασκευάστε τους πίνακες T και M των ερωτημάτων (1) και (2) με $n = 10$, $m = 4$, $a = 2$, $b = c = -1$, και υπολογίστε με το MATLAB:

- i. Το άθροισμα $S = T + M$ και το γινόμενο $P = TM$.
- ii. Τις ιδιοτιμές του M και το διάνυσμα των διαγωνίων στοιχείων του M .
- iii. Την ορίζουσα του M και το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του M .
- iv. Τον πίνακα X με στοιχεία $X_{ij} = P_{ij}^2$.
- v. Το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του πίνακα X .

2. Η συνάρτηση `hilb(n)` του MATLAB κατασκευάζει τον $n \times n$ πίνακα Hilbert $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ με $a_{ij} = 1/(i + j - 1)$, που είναι ένα κλασσικό παράδειγμα πίνακα κακής κατάστασης. Η συνάρτηση `invhilb(n)` του MATLAB κατασκευάζει τον ακριβή αντίστροφο του $n \times n$ πίνακα Hilbert

(τουλάχιστον για $n \leq 15$, περίπου). Γράψτε ένα πρόγραμμα Matlab που να κατασκευάζει τον πίνακα Hilbert A για $n = 2, 3, \dots, 10$ και τον αντίστροφό του A : α) ως `inv(A)` (A^{-1}) και β) ως `invhilib(n)`. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την ποσότητα $t(n) = \|A^{-1} - \text{invhilib}(n)\|_2$ για $n = 2, 3, \dots, 10$, καθώς και το δείκτη κατάστασης $\kappa_2(n)$ του πίνακα Hilbert A ως προς την $\|\cdot\|_2$. Απεικονίστε γραφικά τις συγκρίσεις σας βάζοντας τις τιμές του n στον άξονα των x και τις τιμές $\log_{10}(t)$ και $\log_{10}(\kappa_2)$ στον άξονα των y (βλ. `help semilogy`). Σχολιάστε τις γραφικές αυτές παραστάσεις.

3. Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με προκαθορισμένο δείκτη κατάστασης k είναι ο ακόλουθος:

ΒΗΜΑ 1 Δημιουργήστε διαγώνιο πίνακα D με διαγώνια στοιχεία $d_{ii} = k^{-(i-1)/(n-1)}$, $i = 1, \dots, n$, όπου k σταθερός θετικός αριθμός ($k \geq 1$).

ΒΗΜΑ 2 Κατασκευάστε έναν τυχαίο ορθογώνιο πίνακα Q ($Q^T Q = I$). (Στο MATLAB ένας τέτοιος πίνακας θα μπορούσε να δημιουργηθεί με την εντολή `orth(rand(n))`: βλ. `help orth`).

ΒΗΜΑ 3 $A = Q^T D Q$.

- (i) Εξηγήστε γιατί ο A θα έχει δείκτη κατάστασης k ως προς την $\|\cdot\|_2$ (ευκλείδεια νόρμα).
- (ii) Γράψτε μία συνάρτηση `matcond` στο MATLAB που να δέχεται ως παραμέτρους εισόδου τα n και k και να επιστρέφει τον πίνακα A . Επαληθεύστε ότι ο δείκτης κατάστασης του A , ως προς την $\|\cdot\|_2$, είναι τελικά ο k .
- (iii) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `matcond` του προηγούμενου ερωτήματος κατασκευάστε τυχαίο πίνακα A (500×500) με δείκτη κατάστασης $k = 10^6$. Δημιουργήστε επίσης ένα διάνυσμα b , τέτοιο ώστε η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$ να είναι $x = (1, 1, \dots, 1)^T$. Αν y, z είναι οι υπολογιστικές λύσεις του συστήματος με χρήση του αντίστροφου πίνακα ($y = A^{-1}b$) και με απαλοιφή Gauss, αντίστοιχα, υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για κάθε επίλυση καθώς και τα μεγέθη $\|x - y\|_2$, $\|x - z\|_2$, $\|Ay - b\|_2$, $\|Az - b\|_2$. Τι συμπεραίνετε για την ακρίβεια και την ταχύτητα των δύο μεθόδων;

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες των δύο ατόμων με αυτές της προηγούμενης άσκησης.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Πέμπτη 3/12, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας μια έκθεση (τυπωμένη ή χειρόγραφη) στην οποία θα περιέχονται οι απαντήσεις στα Θέματα 2 και 3 (σχήματα, σχολιασμός τους κλπ.).