Πέμπτη 22 Οκτωβρίου 2009

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα MATLAB (ή C σε διπλή ακρίβεια), το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

   όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της ρ. Ως κριτήριο τερματισμού χρησιμοποιήστε το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις.

   Σε κάθε βήμα n, το πρόγραμμα σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των n, x_n, $f(x_n)$ και $|x_{n+1} - x_n|$. Στην περίπτωση που το πρόγραμμα εκτελέσει το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων και δεν έχει ικανοποιηθεί το παραπάνω κριτήριο σύγκλισης, τότε το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει ένα μήνυμα, π.χ. «Δεν επετεύχθη σύγκλιση σε `NMAX` επαναλήψεις».

2. Αποδείξτε *αναλυτικά* (δηλ. με μελέτη συνάρτησης), ότι η εξίσωση $f(x) := \arctan(2(x-1)) - \ln|x| = 0$ έχει ακριβώς τέσσερεις πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ και σχεδιάστε (με τη βοήθεια του MATLAB) τη γραφική της παράσταση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1 (που υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα), με παραμέτρους x_0, `TOL` και `NMAX` της επιλογής σας, για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ριζών. Τέλος, πάρτε `TOL=1.e-6`, `NMAX=50` και τρέξτε το πρόγραμμά σας με $x_0 = -1,\ 0.65,\ 0.7,\ 1.7,\ 1.8,\ 1.9,\ 5$ και 10. Τι παρατηρείτε;

3. Υπολογίστε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) := \arctan(2(x-1)) - \ln|x| = 0$ με τη βοήθεια της συνάρτησης `fzero` του MATLAB, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων εισόδου της `fzero`.

4. Ο ακόλουθος αλγόριθμος έυρεσης ριζών συνδυάζει τη μέθοδο της διχοτόμησης με εκείνη του Νεύτωνα (και εξασφαλίζει τη σύγκλιση σε περιπτώσεις που η μέθοδος του Νεύτωνα θα αποτύγχανε).

   Επέλεξε διάστημα $[a, b]$ με $f(a)f(b) \leq 0$.
   Υπολόγισε το αρχικό x_0 με τη μέθοδο της διχοτόμησης.
   Για $i = 1, 2, \dots$
      Υπολόγισε το x_i από το x_{i-1} μ' ένα βήμα της μεθόδου του Νεύτωνα.
      Αν $x_i \notin [a, b]$, θέσε $x_i = (a + b)/2$ (από διχοτόμηση).
      Έλεγξε για σύγκλιση.
      Αν $f(a)f(x_i) \leq 0$ θέσε $b = x_i$, αλλιώς θέσε $a = x_i$.

Υλοποιήστε ως συνάρτηση στο MATLAB τον παραπάνω αλγόριθμο σύμφωνα με τις ακόλουθες προδιαγραφές:

```
function [xstar,niter,ierr] = bisnew(a,b,tol,maxit,f,df)
```

`xstar`	Ρίζα (έξοδος).
`niter`	Αριθμός επαναλήψεων που εκτελέσθηκαν (έξοδος).
`a, b`	Τα άκρα του διαστήματος που περιέχει κάποια ρίζα.
`tol`	Η ζητούμενη ακρίβεια.
`maxit`	Ο μέγιστος αριθμός επιτρεπόμενων επαναλήψεων.
`f, df`	Η συνάρτηση και η παράγωγός της.
`ierr`	Παίρνει την τιμή (έξοδος): 0, αν η μέθοδος συνέκλινε 1, αν σε κάποιο βήμα $df(x) \approx 0$. 2, αν εξαντλήθηκε ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση αυτή με παραμέτρους της αρεσκείας σας για να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος 2.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των <u>δύο</u> ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 2-6/11, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας μια έκθεση (τυπωμένη ή χειρόγραφη) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στο Θέμα 2 (μελέτη συνάρτησης, γραφική παράσταση, κλπ.), όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα των άλλων ερωτημάτων, καθώς και σχολιασμός τους.