Ασκήσεις

Κεφάλαιο 1: Αριθμητική κινητής υποδιαστολής και σφάλματα στρογγύλευσης

1. Προτείνετε κατάλληλους τρόπους υπολογισμού των παρακάτω παραστάσεων έτσι ώστε να μην χάνεται ακρίβεια όταν οι πράξεις γίνονται με αριθμητική κινητής υποδιαστολής και πεπερασμένη ακρίβεια:

   (α′) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$, για $x \ll 1$.

   (β′) $\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}$, για $x \gg 1$.

   (γ′) $\frac{1-\cos x}{x}$, για $x \neq 0$, $x \ll 1$.

Κεφάλαιο 2: Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

1. Θεωρήστε την εξίσωση $x = \frac{5}{x^2} + 2$. Αποδείξτε ότι έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Προσδιορίστε ένα διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, όπου $\phi(x) = \frac{5}{x^2} + 2$, να συγκλίνει για $x_0 \in [a,b]$.

2. Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, με $x_{n+1} = \left(\frac{e^{x_n}}{3}\right)^{1/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, συγκλίνει, και το όριό της ανήκει στο διάστημα [0,1].

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) := x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες. Θεωρήστε την ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$, δεδομένου ενός $x_0 \in \mathbb{R}$. Διερευνήστε για ποιές τιμές του x_0 η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποια από τις ρίζες.

Κεφάλαιο 3: Γραμμικά συστήματα

1. Αποδείξτε τις ακόλουθες προτάσεις ή δώστε αντιπαραδείγματα για να δείξετε ότι δεν ισχύουν.

   (α′) Το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας.

   (β′) Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου συμμετρικού πίνακα είναι συμμετρικός.

   (γ′) Αν A και B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε $(AB)^T = A^T B^T$.

2. Υποθέστε ότι οι A και B είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι $n \times n$ πίνακες.

   (α′) Είναι ο $-A$ θετικά ορισμένος;

   (β′) Είναι ο $A + B$ θετικά ορισμένος;

   (γ′) Είναι ο A^2 θετικά ορισμένος;

   (δ′) Είναι ο $A - B$ θετικά ορισμένος;

3. Έστω λ μια ιδιοτιμή ενός $n \times n$ πίνακα A και $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

   (α′) Δείξτε ότι η λ είναι ιδιοτιμή και του A^T.

   (β′) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, ο λ^k είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα το x.

   (γ′) Δείξτε ότι αν ο A αντιστρέφεται, τότε ο $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} με ιδιοδιάνυσμα το x.

   (δ′) Έστω $\alpha \neq \lambda$ δεδομένο. Δείξτε ότι αν ο $A - \alpha I$ αντιστρέφεται, τότε ο $1/(\lambda - \alpha)$ είναι ιδιοτιμή του $(A - \alpha I)^{-1}$ με ιδιοδιάνυσμα το x.

4. Βρείτε πίνακες A και B για τους οποίους $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (Συμπεράνετε ότι η ποσότητα $\rho(A)$ δεν μπορεί να είναι νόρμα πίνακα.)

5. Αποδείξτε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

6. Αποδείξτε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty}$.

7. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Αν με $\kappa(A)$ συμβολίζουμε το δείκτη κατάστασης ενός πίνακα A ως προς μια νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, αποδείξτε ότι $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$, $\forall \alpha \neq 0$, και $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\,\kappa(B)$.

8. Αποδείξτε ότι η ποσότητα
$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$
είναι νόρμα πίνακα. Είναι φυσική νόρμα πίνακα;

9. Έστω S ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $\|x\| = \left(x^T S x\right)^{1/2}$. Δείξτε ότι έτσι ορίζεται μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. [Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι $x^T S y = y^T S x \leq \left(x^T S x\right)^{1/2} \left(y^T S y\right)^{1/2}$.]

10. Έστω A ένας πραγματικός, αντιστρέψιμος πίνακας και έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την ποσότητα $\|\cdot\|'$ ως $\|x\|' := \|Ax\|$. Αποδείξτε ότι και η $\|\cdot\|'$ είναι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

11. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ και $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \|x\|_\infty$. Για κάθε περίπτωση δώστε ένα παράδειγμα ενός μη μηδενικού διανύσματος για το οποίο να επιτυγχάνεται η ισότητα. Συμπεράνατε ότι: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ και δείξτε ότι $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
Αποδείξτε, ακόμη, ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει
$$\|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty \text{ και } \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2,$$
και δώστε ένα παράδειγμα ενός μη μηδενικού πίνακα για τον οποίο να επιτυγχάνεται η ισότητα.

12. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|\cdot\|$ μια φυσική νόρμα πίνακα. Αποδείξτε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του $A^T A$, τότε
$$0 \leq \lambda \leq \|A^T\|\|A\|.$$
Στη συνέχεια δείξτε ότι αν A είναι $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $\kappa_2(A) \leq \sqrt{\kappa_1(A)\,\kappa_\infty(A)}$.

13. Θεωρήστε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
Υπολογίστε τον αντίστροφό του και τους δείκτες κατάστασης $\kappa_1(A)$ και $\kappa_\infty(A)$.
Στη συνέχεια, υπολογίστε τον πίνακα $A^T A$ και δείξτε ότι κάθε διάνυσμα $x \neq 0$, που ικανοποιεί $x_1 = 0$ και $x_2 + \cdots + x_n = 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Δείξτε ακόμη ότι υπάρχουν δύο ιδιοδιανύσματα με $x_2 = \cdots = x_n$ και βρείτε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τέλος, αποδείξτε ότι
$$\kappa_2(A) = \frac{1}{2}\,(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right).$$

14. Βρείτε την ανάλυση Cholesky για τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Κεφάλαιο 4: Παρεμβολή

1. Δίνεται ο διαμερισμός $x_0 = 0$, $x_1 = 0.05$, $x_2 = 0.1$ του διαστήματος [0,0.1]. Βρείτε τη γραμμική spline παρεμβολής s_1 της συνάρτησης $f(x) = e^{2x}$ στα σημεία x_0, x_1, x_2. Βρείτε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^{0.1} e^{2x} dx$ υπολογίζοντας το $\int_0^{0.1} s_1(x)\, dx$, και συγκρίνετέ το με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος.

2. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$, και έστω $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$. Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα Lagrange L_i μπορούν να γραφούν στη μορφή
$$L_i(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\, \omega'(x_i)} & , \quad x \neq x_i \\ 1 & , \quad x = x_i \end{cases} \quad , \quad i = 0, \dots, n.$$

3. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n+2$ διαφορετικά ανά δύο σημεία, και $y_i \in \mathbb{R}$ για $i = 0, 1, \dots, n+1$. Έστω q το πολυώνυμο βαθμού n που παρεμβάλλεται στα σημεία $\{(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \dots, n\}$, και r το πολυώνυμο βαθμού n που παρεμβάλλεται στα σημεία $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n, n+1\}$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο p με
$$p(x) = \frac{(x - x_0) r(x) - (x - x_{n+1}) q(x)}{x_{n+1} - x_0}$$
είναι το πολυώνυμο βαθμού $n+1$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $\{(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \dots, n+1\}$.

Κεφάλαιο 6: Αριθμητική Ολοκλήρωση

1. Χρησιμοποιήστε τον ακόλουθο πίνακα

x	1.1	1.3	1.5
e^x	3.0042	3.6693	4.4817

   για να υπολογίσετε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_{1.1}^{1.5} e^x dx$ με

   (α′) τον κανόνα του τραπεζίου με $x_0 = 1.1$ και $x_1 = 1.5$,

   (β′) τον κανόνα του Simpson με $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.3$ και $x_1 = 1.5$.

2. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ακόλουθων ολοκληρωμάτων και συγκρίνετέ τις με τις ακριβείς τιμές.

   (α′) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}\, dx$,

   (β′) $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\, dx$,

   (γ′) $\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx$,

   (δ′) $\int_1^{5.5} \frac{1}{x}\, dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x}\, dx$.

   Ποιό από τα (γ) και (δ) δίνει καλύτερη προσέγγιση και γιατί;

3. Χρησιμοποιήστε το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου με ομοιόμορφο διαμερισμό από n υποδιαστήματα για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ακόλουθων ολοκληρωμάτων, και συγκρίνετέ τις με τις ακριβείς τιμές.

   (α′) $\int_1^{3} \frac{1}{x}\, dx$, $n = 4$.

   (β′) $\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$, $n = 8$.

   (γ′) $\int_0^{1} \sin \pi x\, dx$, $n = 6$.