Τρίτη 27 Νοεμβρίου 2007

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi t), \quad 0 \le t \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος (όπως μπορείτε να διαπιστώσετε άμεσα) είναι $u(t) = \sin(\pi t)$. Έστω $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$ ένας *ομοιόμορφος* διαμερισμός του διαστήματος [0,1] σε $n+1$ υποδιαστήματα (μήκους, προφανώς, $h := 1/(n+1)$ το καθένα). Αν εφαρμόσουμε μια αριθμητική μέθοδο (για την ακρίβεια, πεπερασμένα στοιχεία με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις) μπορούμε να βρούμε μια προσέγγιση της λύσης u, έστω $\widetilde{u}$, στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού t_i, $i = 1, \ldots, n$. Τα $\widetilde{u}(t_i)$ προκύπτει ότι θα είναι λύση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = f$, όπου $f \in \mathbb{R}^n$, και A είναι ο ακόλουθος $(n \times n)$ τριδιαγώνιος συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{h} + \frac{2\pi^2 h}{3}, \quad i = 1, \ldots, n \\ b_i &= -\frac{1}{h} + \frac{\pi^2 h}{6}, \quad i = 2, \ldots, n \\ f_i &= \frac{4}{h} \sin(\pi t_i) \Big(1 - \cos(\pi h)\Big), \quad i = 1, \ldots, n \\ t_i &= ih, \quad i = 1, \ldots, n, \ \text{ και } h = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.)

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε διπλή ακρίβεια που να καλεί κατάλληλα υποπρογράμματα του LAPACK για να λύσετε το σύστημα $Ax = f$ για $\underline{\boldsymbol{n = 19}}$, και να αποθηκεύει σε ένα αρχείο με όνομα `chol.dat` τα t_i και τα $x_i = \widetilde{u}(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$ σε δύο στήλες. Φροντίστε να εκμεταλλευτείτε τις ιδιότητες του πίνακα ώστε η επίλυση να είναι οικονομική από πλευράς πράξεων και θέσεων μνήμης.

Σχεδιάστε σε ένα σχήμα τη λύση που πήρατε με την μέθοδο αυτή καθώς και την ακριβή λύση $u(t) = \sin(\pi t)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με το πρόγραμμα `gnuplot`:

```
$ gnuplot
> set title 'Ovoma kai arithmos mntrwou'
> plot 'chol.dat' with linespoints
> replot sin(pi*x)
> set term post
> set output 'rslt.ps'
> replot
> quit
```

Τυπώστε το αρχείο `rslt.ps`.

(Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το εκτυπώσετε, με την εντολή `gv rslt.ps`.)

2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\|A\|_\infty < 1$. Αποδείξτε ότι ο $I + A$ είναι αντιστρέψιμος και ότι

$$\|(I+A)^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{1-\|A\|_\infty}.$$

3. Θεωρήστε τον $n \times n$ πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & & \mathbf{0} & & 1 \\ 3 & 8 & 2 & & & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & 3 & 8 & 2 & 1 \\ & & & 3 & 8 & 2 \\ & & & & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(α′) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Ερωτήματος 2, δείξτε ότι ο B αντιστρέφεται και ότι $\kappa_\infty(B) \le 7$, όπου $\kappa_\infty(B)$ είναι ο δείκτης κατάστασης του B ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

(β′) Μια μέθοδος για να επιλύσουμε το σύστημα αυτό είναι να αναλύσουμε τον B σε γινόμενο $B = LU$, όπου

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} & \\ b_2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & b_{n-2} & 1 & & \\ & & & b_{n-1} & 1 & \\ & & & & b_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και } U = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \mathbf{0} & d_1 \\ & a_2 & c_2 & & & d_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

Τώρα, για να λύσουμε το σύστημα $Bx = f$, το γράφουμε ως $L\underbrace{Ux}_{y} = f$ και υπολογίζουμε καταρχήν το y λύνοντας το σύστημα $Ly = f$, και στη συνέχεια το x λύνοντας το σύστημα $Ux = y$. Περιγράψτε έναν οικονομικό (σε πλήθος πράξεων και θέσεων μνήμης) αλγόριθμο για την επίλυση του συστήματος $Bx = f$ και υπολογίστε θεωρητικά το πλήθος των πράξεων (πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις) και των θέσεων μνήμης που απαιτούνται.

Γράψτε ένα πρόγραμμα (σε διπλή ακρίβεια) που να επιλύει το σύστημα $Bx = f$ (B διάστασης 10×10) με τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω. Πάρτε ως $x = (x_1, x_2, \dots, x_{10})^T$ το διάνυσμα που έχει συντεταγμένες x_i, $i = 1, \dots, 10$, τα δέκα πρώτα δεκαδικά ψηφία του λογαρίθμου με βάση 10 του μέσου όρου των αριθμών μητρώου σας, αν τον γράψετε σε κανονική μορφή. (Π.χ. αν ο μέσος όρος των Α.Μ. σας είναι 432.5, τότε $\log(432.5) = 0.2635986112E+01$, οπότε $x = (2,6,3,5,9,8,6,1,1,2)^T$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει το $f = Bx$, στη συνέχεια να υπολογίζει την προσεγγιστική λύση $\widetilde{x}$ με τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω, και τέλος να υπολογίζει την ποσότητα

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|_1}{\|x\|_1}.$$

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να υλοποιήσετε τις συναρτήσεις

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION DNORM(N,U,V)
INTEGER N
DOUBLE PRECISION U(*), V(*)
```

και

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION VNORM(N,U)
INTEGER N
DOUBLE PRECISION U(*)
```

οι οποίες θα υπολογίζουν τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ των διανυσμάτων U-V και U, αντίστοιχα.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες όπως της Άσκησης 1.
- Συμβουλευτείτε τις σημειώσεις για το LAPACK που υπάρχουν στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Όσοι χρησιμοποιήσουν C, θα πρέπει να τροποποιήσουν κατάλληλα τις συναρτήσεις και υποπρογράμματα, και να διαβάσουν το σχετικό κεφάλαιο των σημειώσεων για κλήση υποπρογραμμάτων του LAPACK μέσα από προγράμματα C.
- Την Τρίτη 11/12 κάθε ομάδα θα πρέπεινα παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη ή χειρόγραφη) στην οποία θα περιέχονται: α) σχολιασμός της επιλογής των υποπρογραμμάτων του LAPACK που χρησιμοποιήσατε για το Ερώτημα 1 και το σχήμα β) η λύση του Ερωτήματος 2, και γ) περιγραφή του αλγορίθμου του Ερωτήματος 3 και του υπολογισμού του πλήθους των πράξεων και των θέσεων μνήμης που απαιτεί.
- Η εξέταση του εργαστηριακού μέρους της άσκησης θα γίνει την Τρίτη 11/12 και την Πέμπτη 12/12.