ΕΜ181: Αριθμητικη Αναλυση Ι — Ακαδ. έτος 2007–2008

Πέμπτη 25 Οκτωβρίου 2007

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα **Fortran** σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να υλοποιεί την επαναληπτική μέθοδο $y_{n+1} = \phi(y_n)$ για την προσέγγιση ένος σταθερού σημείου y^* της συνάρτησης ϕ. Ως κριτήριο τερματισμού χρησιμοποιήστε το εξής: Αν $|y_{n+1} - y_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το y_{n+1} ως «σταθερό σημείο». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις. Σε κάθε βήμα n, το πρόγραμμα σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των n, y_n, $\phi(y_n)$ και $|y_{n+1} - y_n|$. Στην περίπτωση που το πρόγραμμα εκτελέσει το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων και δεν έχει ικανοποιηθεί το παραπάνω κριτήριο σύγκλισης, τότε το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει ένα μήνυμα, π.χ. «Δεν επετεύχθη σύγκλιση σε `NMAX` επαναλήψεις».

2. Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της ρ. Οι συναρτήσεις f και f' θα πρέπει να υπολογίζονται από τις συναρτήσεις `ffun(x)` και `dffun(x)`, αντίστοιχα. Και πάλι ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση x_0, και οι παράμετροι `TOL`> 0 και `NMAX` (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού χρησιμοποιήστε το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις. Σε κάθε βήμα n, το πρόγραμμα σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των n, x_n, $f(x_n)$ και $|x_{n+1} - x_n|$. Στην περίπτωση που το πρόγραμμα εκτελέσει το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων και δεν έχει ικανοποιηθεί το παραπάνω κριτήριο σύγκλισης, τότε το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει ένα μήνυμα, π.χ. «Δεν επετεύχθη σύγκλιση σε `NMAX` επαναλήψεις».

3. Αποδείξτε *αναλυτικά* (δηλ. με μελέτη συνάρτησης), ότι η εξίσωση $f(x) := x - 2\tanh x = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες $-\rho, 0, \rho$ και σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση.

4. Θεωρήστε την ακολουθία (y_n): $y_{n+1} = \phi(y_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $\phi(y) = 2\tanh y$. Δείξτε χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συστολής ότι $y_n \to \rho \; \forall\, x_0 \in [1, 3]$. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1, με παραμέτρους `TOL=1.E-10` και `NMAX=100`, για να υπολογίσετε μια προσέγγιση του σταθερού σημείου ρ. Ως αρχική προσέγγιση y_0 θεωρήστε το λογάριθμο με βάση 10 του μέσου όρου των αριθμών μητρώου σας.

5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα, δηλ. το πρόγραμμα του Ερωτήματος 2, με παραμέτρους x_0, `TOL` και `NMAX` τις ίδιες με αυτές του Ερωτήματος 4, υπολογίστε τη ρίζα ρ.

6. Συγκρίνετε τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται για να συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος του Ερωτήματος 1 και η μέθοδος του Νεύτωνα.

7. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτύχει. Για παράδειγμα είναι δυνατόν $x_n \to \infty$ για κάποια αρχική τιμή x_0, ή μπορεί $f'(x_k) = 0$ για κάποιο k. Ένας άλλος τρόπος για να αποτύχει είναι ο εξής: Υποθέστε ότι για κάποια αρχική τιμή x_0 συμβαίνει $x_1 \neq x_0$, $x_2 = x_0$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι τότε η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα είναι: $x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots$. Ελέγξτε αν υπάρχει περίπτωση να συμβεί κάτι τέτοιο για τη ρίζα 0 της συνάρτησης $f(x) := x - 2\tanh x = 0$. Προσπαθήστε να υπολογίσετε με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων την τιμή του x_0 που οδηγεί σε αυτή την συμπεριφορά. (Υπόδειξη: Βρείτε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 και χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της διχοτόμησης ή τη συνάρτηση `ZEROIN`.) Στη συνέχεια τρέξτε και πάλι το πρόγραμμά σας για τη μέθοδο του Νεύτωνα με το x_0 που υπολογίσατε, για να βρείτε μια ρίζα της συνάρτησης f. Τι παρατηρείτε;
(Ένα παράδειγμα χρήσης της `ZEROIN` υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο αρχείο `exzer.f`. Περισσότερα σχετικά με τη `ZEROIN` μπορείτε να βρείτε στο Κεφ. 7 του βιβλίου των Forsythe–Malcolm–Moler, Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των <u>δύο</u> ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 5-9/11, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

- Θα πρέπει την Τρίτη 6/11 κάθε ομάδα να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη ή χειρόγραφη) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα 3 και 4 (μελέτη συνάρτησης, γραφική παράσταση, κλπ.), όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα των άλλων ερωτημάτων, καθώς και σχολιασμός τους.

- Την Τρίτη 6/11 και την Πέμπτη 8/11 (11:00-13:00) θα πραγματοποιηθεί εξέταση στο εργαστήριο Λ-205. Δηλώστε μέχρι την Πέμπτη 1/11 (<u>αυστηρά</u>) την ώρα που επιθυμείτε να εξετασθείτε στους καταλόγους που βρίσκονται στον πίνακα ανακοινώσεων έξω από το γραφείο μου (Θ-308).