Παρασκευή 15 Δεκεμβρίου 2006

3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Έστω x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ διαφορετικά ανα δύο σημεία και $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ γράφεται στη μορφή του Νεύτωνα ως

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}),$$

οπότε οι συντελεστές a_i, $i = 0, 1, \dots, n$, μπορούν να υπολογισθούν βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου

$a_i = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$
Για $k = 1, \dots, n$
  Για $i = 0, \dots, k - 1$
    $a_k = (a_k - a_i)/(x_k - x_i)$
  τέλος
τέλος

Αν οι συντελεστές a_i, $i = 0, \dots, n$, είναι γνωστοί, τότε η τιμή $p_n(z)$ του πολυωνύμου παρεμβολής στο σημείο z, υπολογίζεται με το σχήμα του Horner σύμφωνα με τον αλγόριθμο

$s = a_n$
Για $i = n - 1, \dots, 0$
  $s = a_i + (z - x_i)s$
τέλος
$p_n(z) = s$

Υλοποιήστε ένα υποπρόγραμμα `interp` με ορίσματα το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής n, τα σημεία παρεμβολής x_i, $i = 0, \dots, n$, και τα αντίστοιχα y_i, $i = 0, \dots, n$, το οποίο να υπολογίζει τους συντελεστές a_i του πολυωνύμου παρεμβολής βάσει του αλγορίθμου που δόθηκε παραπάνω.

Έστω

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad -5 \le x \le 5. \tag{1}$$

Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα `interp` για να υπολογίσετε το πολύωνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_{10}$, που παρεμβάλλεται στις τιμές $f(x_i)$ στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \dots, 10$, ενός *ομοιόμορφου* διαμερισμού του [-5,5].

Έστω z_i, $i = 0, 1, \dots, 200$, ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος [-5,5]. Υπολογίστε τις τιμές του πολυωνύμου παρεμβολής $p_{10}(z_i)$ και αποθηκεύστε σε ένα αρχείο με όνομα `lagran.dat`, σε δύο στήλες, τις τιμές z_i, $p_{10}(z_i)$, $i = 0, 1, \dots, 200$.

2. Έστω s η φυσική κυβική spline ($s''(\alpha) = s''(\beta) = 0$), που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, ενός διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Η s σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, είναι ένα κυβικό πολυώνυμο που μπορώ να το γράψω στη μορφή

$$s(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x_i \le x \le x_{i+1}.$$

Αν ο διαμερισμός $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$ είναι *ομοιόμορφος*, τότε οι συντελεστές του κυβικού πολυωνύμου σε κάθε υποδιάστημα, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, υπολογίζονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h\,(\sigma_{i+1} + 2\,\sigma_i), \\ c_i &= 3\sigma_i, \\ d_i &= \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h}, \end{aligned}$$

όπου τα σ_i είναι λύση του τριδιαγώνιου συστήματος

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4h & h & & & & \\ & h & 4h & h & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & h & 4h & h & \\ & & & & h & 4h & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_1 - \Delta_0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

και $h = \dfrac{\beta - \alpha}{n}$, $\Delta_i := \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Για να λύσετε το γραμμικό σύστημα (2) και έτσι να υπολογίσετε τους συντελεστές $b_i,\ c_i,\ d_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το υποπρόγραμμα `choltrd` της Εργ. Άσκησης 2, αφού και εδώ ο πίνακας είναι τριδιαγώνιος, συμμετρικός. Στη συνέχεια για να υπολογίσετε την τιμή της κυβικής spline σε κάποια τιμή $z \in [a, b]$ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `SEVAL` (βλ. σελ. 78–88 του βιβλίου: G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα για μαθηματικούς υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.), ή να γράψετε κάποια δική σας συνάρτηση που να εκτελεί τις διαδικασίες που κάνει η `SEVAL`. (Δηλαδή δεδομένων των διανυσμάτων $b,\ c,\ d$ να εκτελεί δυαδική αναζήτηση για να εντοπίσει το υποδιάστημα στο οποίο ανήκει η τιμή z και στη συνέχεια να υπολογίζει την τιμή του κυβικού πολυωνύμου με σχήμα Horner.)

Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υλοποιεί τα παραπάνω και χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε την τιμή της κυβικής spline $s(z_i)$ σε 201 ισαπέχοντα σημεία z_i του διαστήματος [-5,5] για τη συνάρτηση (1). Αποθηκεύστε σε ένα αρχείο με όνομα `spline.dat`, σε δύο στήλες, τις τιμές z_i, $s(z_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 200$.

3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τα αποτελέσματα των Ερωτημάτων 1 και 2, καθώς και την συνάρτηση (1). Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με τη βοήθεια του `gnuplot`:

```
$ gnuplot
> set title 'Ovoma kai arithmos mntrwou'
> plot 'lagran.dat' w l, 'spline.dat' w l
> replot 1/(1+x*x)
> set term post
> set output 'figure.ps'
> replot
> quit
```

Τυπώστε το αρχείο `figure.ps`.
(Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το εκτυπώσετε, με την εντολή `gv figure.ps`.)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Η συνάρτηση `SEVAL` υπάρχει στο πρόγραμμα `spline.f` που βρίσκεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες όπως της Άσκησης 1.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 15/1/2007–19/1/2007 σε ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένο το σχήμα.