Παρασκευή 15 Δεκεμβρίου 2006

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi t), \quad 0 \le t \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος (όπως μπορείτε να διαπιστώσετε άμεσα) είναι $u(t) = \sin(\pi t)$. Έστω $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$ ένας *ομοιόμορφος* διαμερισμός του διαστήματος [0,1] σε $n+1$ υποδιαστήματα (μήκους, προφανώς, $h := 1/(n+1)$ το καθένα). Αν εφαρμόσουμε μια αριθμητική μέθοδο (για την ακρίβεια, πεπερασμένα στοιχεία με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις) μπορούμε να βρούμε μια προσέγγιση της λύσης u, έστω $\widetilde{u}$, στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού t_i, $i = 1, \ldots, n$. Τα $\widetilde{u}(t_i)$ προκύπτει ότι θα είναι λύση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = f$, όπου $f \in \mathbb{R}^n$, και A είναι ο ακόλουθος $(n \times n)$ τριδιαγώνιος συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{h} + \frac{2\pi^2 h}{3}, \quad i = 1, \ldots, n \\ b_i &= -\frac{1}{h} + \frac{\pi^2 h}{6}, \quad i = 2, \ldots, n \\ f_i &= \frac{4}{h} \sin(\pi t_i) \Big(1 - \cos(\pi h)\Big), \quad i = 1, \ldots, n \\ t_i &= ih, \quad i = 1, \ldots, n, \ \text{ και } h = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.)

1. Ένας τρόπος για να λύσετε το σύστημα $Ax = f$ είναι ο ακόλουθος: Αναλύστε καταρχήν τον A σε γινόμενο $A = LL^T$ (ανάλυση Cholesky), οπότε για να λύσετε το $Ax = f$, το γράφετε ως $L\underbrace{L^T x}_{y} = f$ και υπολογίζετε καταρχήν το y λύνοντας το σύστημα $Ly = f$, και στη συνέχεια το x λύνοντας το σύστημα $L^T x = y$.

   Γράψτε ένα υποπρόγραμμα `choltrd(n,a,b,f)` (σε διπλή ακρίβεια) που να δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων a, την υποδιαγώνιο b, το διάνυσμα των σταθερών όρων f και την τάξη του πίνακα n, και να επιστρέφει στο διάνυσμα f τη λύση του συστήματος $Ax = f$. Γράψτε ένα κυρίως πρόγραμμα που να καλεί την `choltrd(n,a,b,f)` για $\underline{\boldsymbol{n = 19}}$, και να αποθηκεύει σε ένα αρχείο με όνομα `chol.dat` τα t_i και τα $x_i = \widetilde{u}(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$ σε δύο στήλες.

   Μετρήστε θεωρητικά το πλήθος των πράξεων που απαιτεί ο αλγόριθμός σας, καθώς και τις απαιτούμενες θέσεις μνήμης.

2. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, η επαναληπτική μέθοδος SOR για την επίλυση του συστήματος $Ax = f$, ορίζεται από τη σχέση

$$(D + \omega L)\, x^{(m+1)} = \Big[(1-\omega)D - \omega\, U\Big]\, x^{(m)} + \omega\, f, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

όπου $A = L + D + U$, με D τον πίνακα των διαγωνίων στοιχείων του A, L το αυστηρά κάτω τριγωνικό μέρος του A, U το αυστηρά άνω τριγωνικό μέρος του A, και $x^{(0)}$ μια δοσμένη αρχική εκτίμηση της λύσης x. Γράψτε ένα υποπρόγραμμα `sor(n,a,b,f,xold,xnew,omega)` που να εκτελεί ένα βήμα της μεθόδου SOR, δηλ. με δεδομένη την εκτίμηση `xold` να υπολογίζει την εκτίμηση `xnew` σύμφωνα με τη σχέση (1).

Γράψτε ένα πρόγραμμα (σε διπλή ακρίβεια) που να λύνει το σύστημα $Ax = b$, για $\underline{\boldsymbol{n = 19}}$, με τη μέθοδο SOR. Οι επαναλήψεις θα σταματούν είτε όταν

$$\frac{\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_\infty}{\|x^{(m)}\|_\infty} \leq \mathtt{TOL} = 10^{-6},$$

ή όταν $m \geq \mathtt{MAXIT} = 500$. Θεωρήστε ως αρχική εκτίμηση της λύσης την $x^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τα t_i και τα $x_i = \widetilde{u}(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (σε δύο στήλες) σε ένα αρχείο με όνομα `sor.dat`, και στην οθόνη τον αριθμό επαναλήψεων που χρειάστηκε η μέθοδος για να συγκλίνει και την παράμετρο ω, ή ένα κατάλληλο μήνυμα σε περίπτωση που εξαντλήθηκε ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων. Για το συγκεκριμένο κριτήριο τερματισμού θα πρέπει να υλοποιήσετε τις συναρτήσεις

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION DNORM(N,U,V)
INTEGER N
DOUBLE PRECISION U(*), V(*)
```

και

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION VNORM(N,U)
INTEGER N
DOUBLE PRECISION U(*)
```

οι οποίες θα υπολογίζουν τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ των διανυσμάτων `U-V` και `U`, αντίστοιχα. Τρέξτε το πρόγραμμά σας για τις τιμές της παραμέτρου $\omega = 1.0,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5$. Τι παρατηρείτε;

3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τη λύση που πήρατε με καθεμιά από τις δύο μεθόδους καθώς και την ακριβή λύση $u(t) = \sin(\pi t)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με το πρόγραμμα `gnuplot`:

```
$ gnuplot
> set title 'Ovoma kai arithmos mntrwou'
> plot 'chol.dat' with linespoints, 'sor.dat' with linespoints
> replot sin(pi*x)
> set term post
> set output 'rslt.ps'
> replot
> quit
```

Τυπώστε το αρχείο `rslt.ps`.

(Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το εκτυπώσετε, με την εντολή `gv rslt.ps`.)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες όπως της Άσκησης 1.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 15/1/2007–19/1/2007 σε ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένο το σχήμα.