Παρασκευή 10 Νοεμβρίου 2006

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της ρ. Οι συναρτήσεις f και f' θα πρέπει να υπολογίζονται από τις συναρτήσεις `ffun(x)` και `dffun(x)`, αντίστοιχα. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση x_0, και οι παράμετροι `TOL`> 0 και `NMAX` (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού χρησιμοποιήστε το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις. Σε κάθε βήμα n, το πρόγραμμα σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των n, x_n, $f(x_n)$ και $|x_{n+1} - x_n|$. Στην περίπτωση που το πρόγραμμα εκτελέσει το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων και δεν έχει ικανοποιηθεί το παραπάνω κριτήριο σύγκλισης, τότε το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει ένα μήνυμα, π.χ. «Δεν επετεύχθη σύγκλιση σε `NMAX` επαναλήψεις».

2. Αποδείξτε *αναλυτικά* (δηλ. με μελέτη συνάρτησης), ότι η εξίσωση $f(x) := \ln x + \sqrt{x} = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ, και σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1, με παραμέτρους x_0, `TOL` και `NMAX` της επιλογής σας, για να υπολογίσετε μια προσέγγιση της ρίζας ρ. Με χρήση της γεωμετρικής ερμηνείας της μεθόδου του Νεύτωνα αποδείξτε ότι υπάρχει ένα $\widetilde{x}$, τέτοιο ώστε αν $x_0 \geq \widetilde{x}$ η μέθοδος του Νεύτωνα αποτυγχάνει. Υπολογίστε με τη μέθοδο της διχοτόμησης (υπάρχει υλοποίηση της μεθόδου στην ιστοσελίδα του μαθήματος) μια προσέγγιση του $\widetilde{x}$ με 6 δεκαδικά ψηφία, και βεβαιωθείτε υπολογιστικά (παίρνοντας μερικές τιμές του x_0) ότι για $x_0 \geq \widetilde{x}$ η μέθοδος του Νεύτωνα αποτυγχάνει.

3. Αποδείξτε *αναλυτικά*, ότι η εξίσωση $g(x) := \arctan x - x^3 + x = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες $-\rho, 0, \rho$ και σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα με παραμέτρους x_0, `TOL` και `NMAX` της επιλογής σας, υπολογίστε τη ρίζα ρ. Στη συνέχεια, πάρτε `TOL=1.e-6`, `NMAX=50` και τρέξτε το πρόγραμμά σας με $x_0 = 0.740,\ -0.730,\ 0.565,\ 0.570$ και 0.575. Τι παρατηρείτε;

4. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτύχει. Για παράδειγμα είναι δυνατόν $x_n \to \infty$ για κάποια αρχική τιμή x_0, ή μπορεί $f'(x_k) = 0$ για κάποιο k. Ένας άλλος τρόπος για να αποτύχει είναι ο εξής: Υποθέστε ότι για κάποια αρχική τιμή x_0 συμβαίνει $x_1 \neq x_0$, $x_2 = x_0$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι τότε η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα είναι: $x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots$. Ελέγξτε αν υπάρχει περίπτωση να συμβεί κάτι τέτοιο για την ρίζα 0 της συνάρτησης $g(x) = \arctan x - x^3 + x$. Προσπαθήστε να υπολογίσετε με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων την τιμή του x_0 που οδηγεί σε αυτή την συμπεριφορά. (Υπόδειξη: Βρείτε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 και χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της διχοτόμησης ή τη συνάρτηση `ZEROIN`.) Στη συνέχεια τρέξτε και πάλι το πρόγραμμά σας για τη μέθοδο του Νεύτωνα με το x_0 που υπολογίσατε, για να βρείτε μια ρίζα της συνάρτησης g. Τι παρατηρείτε;
(Ένα παράδειγμα χρήσης της `ZEROIN` υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο αρχείο `exzer.f`. Περισσότερα σχετικά με τη `ZEROIN` μπορείτε να βρείτε στο Κεφ. 7 του βιβλίου των Forsythe–Malcolm–Moler, Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των <u>δύο</u> ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Τετάρτη 22/11 (15:00-17:00) και την Πέμπτη 23/11 (17:00-21:00). Θα πρέπει να δηλώσετε, μέχρι την Πέμπτη 16/11/2006, την ώρα την οποία επιθυμείτε να εξεταστείτε στους καταλόγους έξω από το γραφείο Γ113. **ΔΕΝ** θα εξεταστεί κανείς σε ώρα άλλη απο αυτήν που έχει δηλώσει.

- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας χειρόγραφες ή τυπωμένες τις απαντήσεις στα θέματα 2, 3 και 4 (μελέτη συνάρτησης, γραφική παράσταση, κλπ.)