ΕΜ 181: Αριθμητική Ανάλυση Ι (Ακαδ. έτος 2004–2005)

Δευτέρα 4 Δεκεμβρίου 2004

3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Έστω x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ διαφορετικά ανα δύο σημεία και $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ γράφεται στη μορφή του Νεύτωνα ως

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

οπότε οι συντελεστές a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, μπορούν να υπολογισθούν βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου

$a_i = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$
Για $k = 1, \ldots, n$
  Για $i = 0, \ldots, k-1$
    $a_k = (a_k - a_i)/(x_k - x_i)$
  τέλος
τέλος

Αν οι συντελεστές a_i, $i = 0, \ldots, n$, είναι γνωστοί, τότε η τιμή $p_n(z)$ του πολυωνύμου παρεμβολής στο σημείο z, υπολογίζεται με το σχήμα του Horner σύμφωνα με τον αλγόριθμο

$s = a_n$
Για $i = n-1, \ldots, 0$
  $s = a_i + (z - x_i)s$
τέλος
$p_n(z) = s$

Υλοποιήστε ένα υποπρόγραμμα `INTERP` με ορίσματα το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής n, τα σημεία παρεμβολής x_i, $i = 0, \ldots, n$, και τα αντίστοιχα y_i, $i = 0, \ldots, n$, το οποίο να υπολογίζει τους συντελεστές a_i του πολυωνύμου παρεμβολής βάσει του αλγορίθμου που δόθηκε παραπάνω.

2. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας

x	1928	1940	1951	1961	1971	1981	1991	2001
y	6,204,684	7,344,860	7,632,801	8,388,553	8,768,641	9,740,417	10,259,900	10,964,020

όπου y_i είναι ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος x_i. Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα του ερωτήματος 1 για να υπολογίσετε το πολύωνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_7$, που παρεμβάλλεται στις τιμές y_i στα σημεία x_i, και έτσι εκτιμήστε τον πληθυσμό της Ελλάδας τα έτη 1966, 1984 και 1996. Στη συνέχεια σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του πληθυσμού της Ελλάδας συναρτήσει της χρονολογίας, από το 1951 έως το 2001, παίρνοντας εκτιμήσεις για το μέγεθος του πληθυσμού κάθε ένα έτος.

3. Απαντήστε στο ερώτημα 2 χρησιμοποιώντας τα υποπρογράμματα `SPLINE` και `SEVAL` (βλ. σελ. 78–88 του βιβλίου: G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα για μαθηματικούς υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.) Σχεδιάστε τα αποτελέσματα που παίρνετε στο ίδιο σχήμα με εκείνα του ερωτήματος 2.

4. Γράψτε ένα πρόγραμμα σε διπλή ακρίβεια που να υπολογίζει αριθμητικά το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου και με το σύνθετο τύπο του Simpson και ομοιόμορφο διαμερισμό. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να περιέχει μια συνάρτηση `TRAP(A, B, N)`, και μια συνάρτηση `SIMPS(A, B, N)`, που θα δέχονται ως είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ και το πλήθος n των υποδιαστημάτων του διαμερισμού, και θα επιστρέφουν την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $I(f)$ με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου (`T(f)`) και με το σύνθετο τύπο του Simpson (`S(f)`), αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις `TRAP` και `SIMPS` θα πρέπει να καλούν τη συνάρτηση `F(X)` για τον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης $f(x)$. Με το πρόγραμμά σας υπολογίστε εκτιμήσεις του π ολοκληρώνοντας αριθμητικά το δεύτερο μέλος της σχέσης

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx.$$

Το πρόγραμμα θα πρέπει να υπολογίζει τις προσεγγιστικές τιμές $T(f)$ και $S(f)$ του ολοκληρώματος, για $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ και 128 διαστήματα, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα $|I(f)-T(f)|$ και $|I(f)-S(f)|$, και να τα εκτυπώνει στη μορφή:

n	h	T(f)	|I(f)-T(f)|	S(f)	|I(f)-S(f)|
2					
4					
8					
16					
32					
64					
128					

Προφανώς, εδώ $I(f) = \pi$, το οποίο μπορείτε να υπολογίσετε ως $\pi = 4.0 \arctan(1.0)$.