ΕΜ 181: Αριθμητική Ανάλυση Ι (Ακαδ. έτος 2004–2005)

Πέμπτη 14 Οκτωβρίου 2004

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της x^*. Οι συναρτήσεις f και f' θα πρέπει να υπολογίζονται από τις συναρτήσεις `ffun(x)` και `dffun(x)`, αντίστοιχα. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση x_0, και οι παράμετροι `TOL`> 0 και `NMAX` (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού θα χρησιμοποιείται το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού απαντήστε στα εξής ερωτήματα:

   (α′) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας στην συνάρτηση $f(x) := x^2 - 2x - 3$ για την προσέγγιση της ρίζας $x^* = -1$. Με $x_0 = -7$, `TOL`$=10^{-6}$, και `NMAX`$=10$, τυπώστε τα x_n, $f(x_n)$ και $|x_n - x_{n+1}|$ και «βεβαιωθείτε» υπολογιστικά ότι τα x_n τείνουν στην x^*.

   (β′) Αποδείξτε *αναλυτικά* (δηλ. με μελέτη συνάρτησης), ότι η εξίσωση $f(x) := x^3 - 6\arctan x = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες (τις $-\rho$, 0, ρ, όπου $\rho > 0$). Χρησιμοποιώντας για κάθε ρίζα παραμέτρους x_0, `TOL` και `NMAX` της επιλογής σας, υπολογίστε τις ρίζες αυτές με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων. Τι συμβαίνει όταν $x_0 = -1, -0.8, -0.4, 0.4, 0.8, 1$; Σχολίαστε τα αποτελέσματα.

   (γ′) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτύχει. Για παράδειγμα είναι δυνατόν $x_n \to \infty$ για κάποια αρχική τιμή x_0, ή μπορεί $f'(x_k) = 0$ για κάποιο k. Ένας άλλος τρόπος για να αποτύχει είναι ο εξής: Υποθέστε ότι για κάποια αρχική τιμή x_0 συμβαίνει $x_1 \neq x_0$, $x_2 = x_0$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι τότε η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα είναι: $x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots$. Ελέγξτε αν υπάρχει περίπτωση να συμβεί κάτι τέτοιο για την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6\arctan x$. Αν, ναι, υπολογίστε με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων την τιμή του x_0 που οδηγεί τη μέθοδο του Νεύτωνα σε αυτή την συμπεριφορά.

2. Χρησιμοποιώντας το υποπρόγραμμα – συνάρτηση `ZEROIN`, με παραμέτρους της επιλογής σας, υπολογίστε τις ρίζες των συναρτήσεων των ερωτημάτων 1α′, 1β′, καθώς και την ζητούμενη τιμή του x_0 του ερωτήματος 1γ′. (Ένα παράδειγμα χρήσης της `ZEROIN` υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο αρχείο `exzer.f`. Περισσότερα σχετικά με τη `ZEROIN` μπορείτε να βρείτε στο Κεφ. 7 του βιβλίου των Forsythe–Malcolm–Moler, Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.)

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Δευτέρα 25/10 και την Τρίτη 26/10. Θα πρέπει να δηλώσετε την ώρα την οποία επιθυμείτε να εξεταστείτε στους καταλόγους έξω από το γραφείο Γ113. ΔΕΝ θα εξεταστεί κανείς σε ώρα άλλη απο αυτήν που έχει δηλώσει.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένα τα προγράμματά σας, καθώς και τυπωμένες ή χειρόγραφες τις απαντήσεις στα θέματα 1β′ και 1γ′ (μελέτη συνάρτησης κλπ.)