**Τρίτη 28 Ιουνίου 2005**

# 3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Έστω $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ διαφορετικά ανα δύο σημεία και $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ γράφεται στη μορφή του Νεύτωνα ως

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

οπότε οι συντελεστές $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, μπορούν να υπολογισθούν βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου

$a_i = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$
Για $k = 1, \ldots, n$
    Για $i = 0, \ldots, k-1$
        $a_k = (a_k - a_i)/(x_k - x_i)$
    τέλος
τέλος

Αν οι συντελεστές $a_i$, $i = 0, \ldots, n$, είναι γνωστοί, τότε η τιμή $p_n(z)$ του πολυωνύμου παρεμβολής στο σημείο $z$, υπολογίζεται με το σχήμα του Horner σύμφωνα με τον αλγόριθμο

$s = a_n$
Για $i = n-1, \ldots, 0$
    $s = a_i + (z - x_i)s$
τέλος
$p_n(z) = s$

Υλοποιήστε ένα υποπρόγραμμα `INTERP` με ορίσματα το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής $n$, τα σημεία παρεμβολής $x_i$, $i = 0, \ldots, n$, και τα αντίστοιχα $y_i$, $i = 0, \ldots, n$, το οποίο να υπολογίζει τους συντελεστές $a_i$ του πολυωνύμου παρεμβολής βάσει του αλγορίθμου που δόθηκε παραπάνω.

2. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας

| $x$ | 1951 | 1961 | 1971 | 1981 | 1991 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7,632,801 | 8,388,553 | 8,768,641 | 9,740,417 | 10,259,900 | 10,964,020 |

όπου $y_i$ είναι ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος $x_i$. Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα του ερωτήματος 1 για να υπολογίσετε το πολύωνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_5$, που παρεμβάλλεται στις τιμές $y_i$ στα σημεία $x_i$, και έτσι εκτιμήστε τον πληθυσμό της Ελλάδας τα έτη 1966, 1987 και 1996. Στη συνέχεια σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του πληθυσμού της Ελλάδας συναρτήσει της χρονολογίας, από το 1951 έως το 2001, παίρνοντας εκτιμήσεις για το μέγεθος του πληθυσμού κάθε δύο χρόνια.

3. Απαντήστε στο ερώτημα 2 χρησιμοποιώντας τα υποπρογράμματα `SPLINE` και `SEVAL` (βλ. σελ. 78–88 του βιβλίου: G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα για μαθηματικούς υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.) Σχεδιάστε τα αποτελέσματα που παίρνετε στο ίδιο σχήμα με εκείνα του ερωτήματος 2.

4. Η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται ως

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε έναν πίνακα τιμών για την $\mathrm{erf}(x)$, για $x = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.9, 2.0$. Για να το επιτύχετε αυτό γράψτε ένα πρόγραμμα σε διπλή ακρίβεια που να υπολογίζει αριθμητικά το παραπάνω ολοκλήρωμα (για τις διάφορες τιμές του $x$) με το σύνθετο τύπο του Simpson και ομοιόμορφο διαμερισμό. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να περιέχει μια συνάρτηση `SIMPS(A, B, N, F, S)`, που θα δέχονται ως είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, το πλήθος $n$ των υποδιαστημάτων του διαμερισμού καθώς και την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f$, και θα επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $S$. Για κάθε $x$ χρησιμοποιήστε $n$ υποδιαστήματα, με $n = x/h$, όπου $h = 0.05$. (Δηλ. για $x = 0.1$ πάρτε $n = 2$ υποδιαστήματα, για $x = 0.2$ πάρτε $n = 4$, κ.ο.κ.) Συγκρίνετε τον πίνακά σας με τις τιμές που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

| $x$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{erf}(x)$ | 0.00000000 | 0.11246292 | 0.22270259 | 0.32862676 | 0.42839236 | 0.52049988 |

| $x$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{erf}(x)$ | 0.60385609 | 0.67780119 | 0.74210096 | 0.79690821 | 0.84270079 |

| $x$ | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{erf}(x)$ | 0.88020507 | 0.91031398 | 0.93400794 | 0.95228512 | 0.96610515 |

| $x$ | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{erf}(x)$ | 0.97634838 | 0.98379046 | 0.98909050 | 0.99279043 | 0.99532227 |