Δευτέρα 4 Δεκεμβρίου 2005

3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Έστω x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ διαφορετικά ανα δύο σημεία και $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ γράφεται στη μορφή του Νεύτωνα ως

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

οπότε οι συντελεστές a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, μπορούν να υπολογισθούν βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου

$a_i = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$
Για $k = 1, \ldots, n$
    Για $i = 0, \ldots, k-1$
        $a_k = (a_k - a_i)/(x_k - x_i)$
    τέλος
τέλος

Αν οι συντελεστές a_i, $i = 0, \ldots, n$, είναι γνωστοί, τότε η τιμή $p_n(z)$ του πολυωνύμου παρεμβολής στο σημείο z, υπολογίζεται με το σχήμα του Horner σύμφωνα με τον αλγόριθμο

$s = a_n$
Για $i = n-1, \ldots, 0$
    $s = a_i + (z - x_i)s$
τέλος
$p_n(z) = s$

Υλοποιήστε ένα υποπρόγραμμα `INTERP` με ορίσματα το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής n, τα σημεία παρεμβολής x_i, $i = 0, \ldots, n$, και τα αντίστοιχα y_i, $i = 0, \ldots, n$, το οποίο να υπολογίζει τους συντελεστές a_i του πολυωνύμου παρεμβολής βάσει του αλγορίθμου που δόθηκε παραπάνω.

2. Έστω $x_i = i - 10$, $i = 0, 1, \ldots, 20$ και $y_i = \begin{cases} 1, & \text{για } i = 10 \\ 0, & \text{για } i \neq 10 \end{cases}$, $i = 0, 1, \ldots, 20$.

Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα του ερωτήματος 1 για να υπολογίσετε το πολύωνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_{20}$ (βαθμού ≤ 20), που παρεμβάλλεται στις τιμές y_i στα σημεία x_i. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει τις τιμές του πολυωνύμου παρεμβολής σε 201 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος [-10,10] και να τις αποθηκεύει σ΄ ένα αρχείο. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του gnuplot, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής.

(**Προσοχή:** Στο αρχείο δεν πρέπει να εκτυπώνονται οι συντελεστές του πολυωνύμου, παρά μόνο τα 201 σημεία του διαστήματος [-10,10] και οι αντίστοιχες τιμές του πολυωνύμου στα σημεία αυτά.)

3. Απαντήστε στο ερώτημα 2 χρησιμοποιώντας τα υποπρογράμματα `SPLINE` και `SEVAL` (βλ. σελ. 78–88 του βιβλίου: G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα για μαθηματικούς υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.) Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα `SPLINE` για να προσδιορίσετε τους

συντελεστές της κυβικής spline που παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση **SEVAL** για να πάρετε τιμές της spline σε 201, και πάλι, ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος [-10,10]. Σχεδιάστε τα αποτελέσματα που παίρνετε στο ίδιο σχήμα με εκείνα του ερωτήματος 2.

Παρατηρήσεις

- Τα υποπρογράμματα **SPLINE** και **SEVAL**, μαζί με ένα παράδειγμα για τη χρήση τους, μπορείτε να τα βρείτε στο αρχείο `spline.f` στη σελίδα του μαθήματος.
- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες με αυτές των προηγούμενων ασκήσεων.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 12/12–16/12 σε ώρες που θα ανακοινωθούν την Πέμπτη 8/12.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένο το σχήμα.