Τετάρτη 16 Νοεμβρίου 2005

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, οι επαναληπτικές μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$, ορίζονται από τις σχέσεις

$$Dx^{(m+1)} = -(L+U)x^{(m)} + b, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

και

$$(L+D)x^{(m+1)} = -Ux^{(m)} + b, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

όπου $A = L + D + U$, με D τον πίνακα των διαγωνίων στοιχείων του A, L το αυστηρά κάτω τριγωνικό μέρος του A, U το αυστηρά άνω τριγωνικό μέρος του A, και $x^{(0)}$ μια δοσμένη αρχική εκτίμηση της λύσης x.

1. Υλοποιήστε μια υπορουτίνα
   ```
   SUBROUTINE JACOBI (N, A, LDA, B, XOLD, XNEW)
   INTEGER N, LDA
   DOUBLE PRECISION A(LDA,*), B(*), XOLD(*), XNEW(*)
   ```
   που να εκτελεί ένα βήμα της μεθόδου Jacobi, δηλ. δεδομένης της εκτίμησης `XOLD` να υπολογίζει την επόμενη εκτίμηση `XNEW`, βάσει της σχέσης (1).

2. Υλοποιήστε μια υπορουτίνα
   ```
   SUBROUTINE GAUSDL (N, A, LDA, B, XOLD, XNEW)
   INTEGER N, LDA
   DOUBLE PRECISION A(LDA,*), B(*), XOLD(*), XNEW(*)
   ```
   που να εκτελεί ένα βήμα της μεθόδου Gauss–Seidel, δηλ. δεδομένης της εκτίμησης `XOLD` να υπολογίζει την επόμενη εκτίμηση `XNEW`, βάσει της σχέσης (2).

3. Γράψτε ένα πρόγραμμα που να λύνει το σύστημα $Ax = b$, πρώτα με τη μέθοδο Jacobi, και στη συνέχεια με τη μέθοδο Gauss–Seidel. Και στις δύο περιπτώσεις οι επαναλήψεις θα σταματούν είτε όταν

   $$\frac{\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_\infty}{\|x^{(m)}\|_\infty} \leq \mathtt{TOL} = 10^{-6},$$

   ή όταν $m \geq \mathtt{MAXIT} = 100$. Θεωρήστε ως αρχική εκτίμηση της λύσης την $x^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τους αριθμούς $\frac{\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_\infty}{\|x^{(m)}\|_\infty}$, $m = 1, 2, \ldots$, σε αρχεία με ονόματα `jac.dat` και `gsd.dat`, αντίστοιχα, και στην οθόνη τον αριθμό επαναλήψεων που χρειάστηκε καθεμιά από τις μεθόδους για να συγκλίνει, ή ένα κατάλληλο μήνυμα σε περίπτωση που εξαντλήθηκε ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων. Για το συγκεκριμένο κριτήριο τερματισμού θα πρέπει να υλοποιήσετε τις συναρτήσεις
   ```
   DOUBLE PRECISION FUNCTION DNORM(N,U,V)
   INTEGER N
   DOUBLE PRECISION U(*), V(*)
   ```
   και
   ```
   DOUBLE PRECISION FUNCTION VNORM(N,U)
   INTEGER N
   DOUBLE PRECISION U(*)
   ```
   οι οποίες θα υπολογίζουν τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ των διανυσμάτων `U-V` και `U`, αντίστοιχα.

4. Στη συνέχεια, θα συγκρίνετε τις προσεγγίσεις που παράγουν οι δύο μέθοδοι με τη λύση `X`, που παράγουν τα υποπρογράμματα `DGETRF` και `DGETRS` του LAPACK. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει και να τυπώνει (στην οθόνη) τους αριθμούς $\|\mathtt{X} - \mathtt{X_J}\|_\infty / \|\mathtt{X}\|_\infty$ και $\|\mathtt{X} - \mathtt{X_{GS}}\|_\infty / \|\mathtt{X}\|_\infty$, όπου με $\mathtt{X_J}$ και $\mathtt{X_{GS}}$ συμβολίζουμε τις τελικές προσεγγίσεις που παράγουν οι μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel, αντίστοιχα.

5. Τα δεδομένα του προβλήματος, δηλ. ο πίνακας A και το διάνυσμα b περιέχονται στο αρχείο `ask2a.dat`, που υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Ο πίνακας A στον οποίο θα δοκιμάσετε το πρόγραμμά σας είναι 50×50 και αραιός, δηλ. πολλά από τα στοιχεία του είναι μηδέν. Για το λόγο αυτό στο αρχείο `ask2a.dat` δίνονται μόνο τα μη μηδενικά στοιχεία του. Το αρχείο `ask2a.dat` έχει την παρακάτω μορφή:
   1η γραμμή: τάξη του πίνακα (`N`), και αριθμός μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα A (`NNZ`).
   επόμενες `NNZ` γραμμές: δείκτης γραμμής, δείκτης στήλης, και αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα A.
   επόμενες `N` γραμμές: τα στοιχεία του διανύσματος b.

6. Για να παραστήσουμε γραφικά την ταχύτητα με την οποία συγκλίνει κάθε μία από τις δύο μεθόδους, μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα των αριθμών $\frac{\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty}{\|x^{(m)}\|_\infty}$, $m = 1, 2, \ldots$, ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων (m). Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με το πρόγραμμα `gnuplot`:
```
$ gnuplot
> set parametric
> set logscale y
> set title 'Ovoma kai arithmos mntrwou'
> plot 'jac.dat' w l, 'gsd.dat' w l
> set term post
> set output 'speed.ps'
> replot
> quit
```
   Τυπώστε το αρχείο `speed.ps`.
   (Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το εκτυπώσετε, με την εντολή `gv speed.ps`.)

7. Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα $Ax = f$, όπου $f \in \mathbb{R}^n$, και A είναι ο ακόλουθος τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}.$$

   Στο Κεφάλαιο 3.4 του βιβλίου σας περιγράφεται μια μέθοδος για να επιλύσουμε το σύστημα αυτό. (Η ιδέα είναι να αναλύσουμε τον A σε γινόμενο $A = LU$, οπότε για να λύσουμε το σύστημα $Ax = f$, το γράφουμε ως $L\underbrace{Ux}_{y} = f$ και υπολογίζουμε καταρχήν το y λύνοντας το σύστημα $Ly = f$, και στη συνέχεια το x λύνοντας το σύστημα $Ux = y$. Γράψτε ένα πρόγραμμα (σε διπλή ακρίβεια) που να επιλύει το σύστημα $Ax = f$ (A διάστασης 40×40) με τη μέθοδο που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.4 του βιβλίου σας. Τα διανύσματα a, b, c, και f δίνονται στο αρχείο `ask2b.dat`, που βρίσκεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Στο αρχείο αυτό η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στο διάνυσμα a, η δεύτερη στο b, η τρίτη στο c, και η τέταρτη στο f.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Συμβουλευτείτε τις σημειώσεις για το LAPACK που υπάρχουν στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Όσοι χρησιμοποιήσουν C, θα πρέπει να τροποποιήσουν κατάλληλα τις παραπάνω συναρτήσεις και υποπρογράμματα, και να διαβάσουν το σχετικό κεφάλαιο των σημειώσεων για κλήση υποπρογραμμάτων του LAPACK μέσα από προγράμματα C.

- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες όπως της Άσκησης 1.

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 28/11–2/12 σε ώρα που θα ανακοινωθεί την επόμενη εβδομάδα.

- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένο το σχήμα.