Τετάρτη 19 Οκτωβρίου 2005

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της x^*. Οι συναρτήσεις f και f' θα πρέπει να υπολογίζονται από τις συναρτήσεις `ffun(x)` και `dffun(x)`, αντίστοιχα. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση x_0, και οι παράμετροι `TOL`> 0 και `NMAX` (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού χρησιμοποιήστε το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq$`TOL` για πρώτη φορά, τότε θεώρησε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ `NMAX` επαναλήψεις.

2. Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο της τέμνουσας. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
όπου x_0, x_1 δεδομένες αρχικές προσεγγίσεις της x^*. Η συνάρτηση f θα πρέπει να υπολογίζεται και πάλι από την `ffun(x)`. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται οι αρχικές προσεγγίσεις x_0, x_1, και οι παράμετροι `TOL`> 0 και `NMAX` (φυσικός). Χρησιμοποιήστε ως κριτήριο τερματισμού αυτό του ερωτήματος 1.

   Με τη βοήθεια των προγραμμάτων αυτών απαντήστε στα εξής ερωτήματα:

3. Δοκιμάστε τα προγράμματά σας στη συνάρτηση $f(x) := x^3 - 2x - 21$ για την προσέγγιση της ρίζας $x^* = 3$. Για τη μέθοδο του Νεύτωνα πάρτε $x_0 = 10$, `TOL`$=10^{-6}$ και `NMAX`$=20$, ενώ για τη μέθοδο της τέμνουσας πάρτε $x_0 = 12$ και $x_1 = 10$. Τυπώστε τα x_n, $f(x_n)$ και $|x_n - x_{n+1}|$ για καθεμιά από τις δύο μεθόδους, και «βεβαιωθείτε» υπολογιστικά ότι τα x_n τείνουν στην x^*.

   Τι συμβαίνει στη μέθοδο του Νεύτωνα όταν $x_0 = -\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, 0, 0.8$; Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

4. Αποδείξτε *αναλυτικά* (δηλ. με μελέτη συνάρτησης), ότι η εξίσωση $f(x) := e^x - x^2 - 2 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα και σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. Χρησιμοποιώντας παραμέτρους x_0, x_1, `TOL` και `NMAX` της επιλογής σας, υπολογίστε τη ρίζα με τις μεθόδους α) *της διχοτόμησης*, β) *του Νεύτωνα* και γ) *της τέμνουσας*, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων. (Υλοποίηση της μεθόδου της διχοτόμησης υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος.)

5. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτύχει. Για παράδειγμα είναι δυνατόν $x_n \to \infty$ για κάποια αρχική τιμή x_0, ή μπορεί $f'(x_k) = 0$ για κάποιο k. Ένας άλλος τρόπος για να αποτύχει είναι ο εξής: Υποθέστε ότι για κάποια αρχική τιμή x_0 συμβαίνει $x_1 \neq x_0$, $x_2 = x_0$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι τότε η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα είναι: $x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots$. Ελέγξτε αν υπάρχει περίπτωση να συμβεί κάτι τέτοιο για την συνάρτηση $g(x) = \mathrm{sign}(x-2)\sqrt{|x-2|}$. Προσπαθήστε να υπολογίσετε τη ρίζα $x^* = 2$ της εξίσωσης $g(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα για διάφορες αρχικές τιμές x_0. Προσπαθήστε να υπολογίσετε τη ρίζα και με τη μέθοδο της τέμνουσας. Τι παρατηρείτε;

6. Χρησιμοποιώντας το υποπρόγραμμα – συνάρτηση `ZEROIN`, με παραμέτρους της επιλογής σας, υπολογίστε τις ρίζες των συναρτήσεων των ερωτημάτων 3, 4 και 5. (Ένα παράδειγμα χρήσης της `ZEROIN` υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο αρχείο `exzer.f`. Περισσότερα σχετικά με τη `ZEROIN` μπορείτε να

βρείτε στο Κεφ. 7 του βιβλίου των Forsythe–Malcolm–Moler, Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς, Π.Ε.Κ., 2000.)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των <u>δύο</u> ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Τετάρτη 2/11 (17:00-21:00) και την Πέμπτη 3/11 (17:00-19:00). Θα πρέπει να δηλώσετε, μέχρι την Πέμπτη 27/10/2005, την ώρα την οποία επιθυμείτε να εξεταστείτε στους καταλόγους έξω από το γραφείο Γ113. **ΔΕΝ** θα εξεταστεί κανείς σε ώρα άλλη απο αυτήν που έχει δηλώσει.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένες ή χειρόγραφες τις απαντήσεις στα θέματα 4 και 5 (μελέτη συνάρτησης, γραφική παράσταση κλπ.)