3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παράδοση: Παρασκευή 22/6/2007.

1. Υπολογίστε την αρμονική συνάρτηση $u(x,y)$ στο τετράγωνο $D := \{0 < x < \pi,\, 0 < y < \pi\}$ με τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} &u_y = 0, \text{ για } y = 0 \text{ και } y = \pi, \\ &u = 0, \text{ για } x = 0, \\ &u = \cos^2 y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y), \text{ για } x = \pi. \end{aligned}$$

2. Λύστε την εξίσωση του Laplace στο *εξωτερικό* $(r > a)$ ενός δίσκου ακτίνας a, με συνοριακή συνθήκη $u = 1 + 3\sin\theta$ για $r = a$, και με τη συνθήκη στο άπειρο ότι η u παραμένει φραγμένη καθώς $r \to \infty$.

3. Λύστε την εξίσωση του Laplace σ' ένα δακτύλιο $(1 < r < 2)$, όταν στην εξωτερική του πλευρά $(r = 2)$ δίνεται ότι $u = 0$, ενώ στην εσωτερική του πλευρά $(r = 1)$ δίνεται ότι $u = \sin^2\theta$.

4. Υπολογίστε την λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση του Laplace:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ στο } D := \{x > 0,\, y > 0 :\ x^2 + y^2 < a^2\}, \\ &u = 0, \text{ για } x = 0 \text{ και } y = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial r} = 1, \text{ για } r = a. \end{aligned}$$

5. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα Neumann για την εξίσωση του Poisson

$$\begin{aligned} &\Delta u = f, \text{ στο } D, \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ στο } \partial D, \end{aligned}$$

δεν έχει λύση, εκτός εαν

$$\iiint_D f\, dxdydz = \iint_{\partial D} g\, ds.$$

6. Με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών να δειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{array}{ll} tu_t = u_{xx} + 2u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), & t > 0, \end{array}$$

έχει περισσότερες από μία λύσεις.

Υπόδειξη: Αν $u = XT$ η εξίσωση καταλήγει στην $\frac{tT'}{T} - 2 = \frac{X''}{X} = -\lambda$.

7. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση του κύματος

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < \ell \\ u(0,t) = 0 = u_x(\ell,t), & t > 0 \end{cases}$$

όπου ϕ, ψ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$ είναι μία σταθερά.

(α′) Η ενέργεια E της λύσης u του προβλήματος ορίζεται από τη σχέση

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left(\frac{1}{c^2}u_t^2 + u_x^2\right) dx.$$

Να δειχθεί ότι η ενέργεια παραμένει σταθερή.

(β′) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα στο (α′) για να δείξετε ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση.

8. Έστω u_1 και u_2 λύσεις του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ στο } D, \\ &u = g, \text{ στο } \partial D, \end{aligned}$$

για δεδομένα $g = g_1$ και g_2, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι αν $g_1 \geq g_2$ στο ∂D, τότε $u_1 \geq u_2$ στο $\overline{D}$.