

Πιθανότητες & Στατιστική Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Δ.Α. Μητσούδης

Πιθανότητες & Στατιστική - Τμ. Ναυπηγών

1 / 1

Μαθηματικά μοντέλα

Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι μια περιγραφή ενός συστήματος με χρήση μαθηματικών εννοιών και μαθηματικών όρων.

Μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται

- στις φυσικές επιστήμες (φυσική, βιολογία, χημεία, ...)
- σε επιστήμες μηχανικού (μηχανολογία, ηλεκτρολογία, ...)
- στην επιστήμη υπολογιστών
- στις κοινωνικές επιστήμες (ψυχολογία, οικονομικά, ...)

Δ.Α. Μητσούδης

Πιθανότητες & Στατιστική - Τμ. Ναυπηγών

2 / 1

Κατηγορίες μαθηματικών μοντέλων

Αιτιοκρατικά μοντέλα Deterministic models

Στις παραμέτρους του συστήματος που περιγράφουν δεν περιλαμβάνεται καμία έννοια τυχαιότητας, έτσι ώστε οποιαδήποτε δεδομένη είσοδος στο σύστημα οδηγεί κάθε φορά στο ίδιο αποτέλεσμα
(Αίτιο → αποτέλεσμα)

Στοχαστικά Μοντέλα Stochastic models

Λαμβάνουν υπόψιν τους την τυχαιότητα έτσι ώστε μια δεδομένη είσοδος στο σύστημα να οδηγεί σε διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα.

Δ.Α. Μητσούδης

Πιθανότητες & Στατιστική - Τμ. Ναυπηγών

3 / 1

Παραδείγματα

- Το ύψος h (σε m) ενός μήλου που πέφτει από ένα αερόστατο που βρίσκεται στα 300 m μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$h = 300 - 5t^2$$

όπου t είναι ο χρόνος (σε sec) που έχει περάσει από τη στιγμή που έπεσε το μήλο. (Αιτιοκρατικό μοντέλο)

- Ρίχνω ένα ζάρι μέχρι να έρθει 5 (προφανώς στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχεται τυχαιότητα)

Δ.Α. Μητσούδης

Πιθανότητες & Στατιστική - Τμ. Ναυπηγών

4 / 1

Βασικές έννοιες πιθανοτήτων

Οι πιθανότητες έχουν τις ρίζες τους στην ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών και έτσι συχνά θα χρησιμοποιούμε τέτοιου είδους παραδείγματα

- **Πείραμα:** Οποιαδήποτε διαδικασία της οποίας το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων.

Π.χ. στρίβω ένα νόμισμα, ρίχνω ένα ζάρι, τραβάω ένα χαρτί από μια τράπουλα

- **Δειγματικός χώρος (sample space) Ω :** Είναι το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος.

Π.χ. Όταν στρίβω ένα νόμισμα και το αφήνω να πέσει στο έδαφος υπάρχει περίπτωση να έρθει **κεφαλή (Κ)** ή **γράμματα (Γ)**. Άρα $\Omega = \{Κ, Γ\}$.

Π.χ. Όταν ρίχνω ένα ζάρι θα φέρω έναν από τους έξι αριθμούς **1, 2, ..., 6**. Άρα $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- **Ενδεχόμενο (event):** είναι ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου

Παράδειγμα

Ρίχνουμε δυό ζάρια και, για ευκολία, ας υποθέσουμε ότι το ένα είναι μπλε και το άλλο κόκκινο. Γράφουμε το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος στη μορφή (m, n) όπου m είναι ο αριθμός στο μπλέ ζάρι και n ο αριθμός στο κόκκινο ζάρι.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Το ενδεχόμενο «ρίχνω δύο ζάρια και φέρνω άθροισμα 8» = $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

Πόσα στοιχεία περιέχει το ενδεχόμενο:
«ρίχνω δύο ζάρια και φέρνω άθροισμα 9»;



Σύνολα

Cantor: Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή M , (σαφώς) διακριτών αντικειμένων m (που ονομάζουμε «στοιχεία» του συνόλου M), της διαίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούμε ως ολότητα. (wikipedia)

Π.χ.

Το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου:

$$A = \{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\}.$$

Το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2010: $B = \{0, 1, 2\}$.

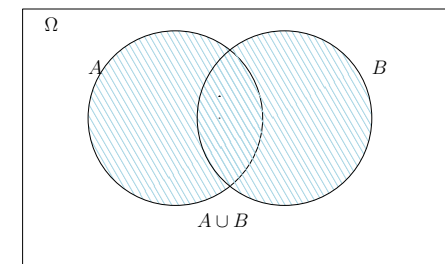
Το σύνολο των κατοίκων του Δήμου Αιγάλεω:

$$\Gamma = \{x: x \text{ είναι κάτοικος του Δήμου Αιγάλεω}\}.$$

Ορισμοί

Έστω δύο σύνολα A και B υποσύνολα του Ω .

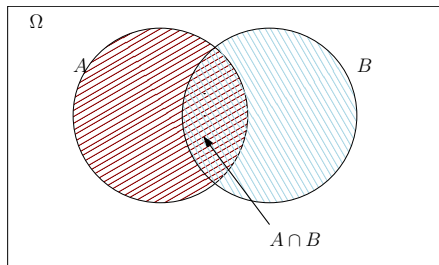
- **Κενό σύνολο (συμβ. $\emptyset$)** λέμε το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο.
- Θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B , (συμβ. $A \subset B$) όταν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B .
- **Ένωση των A και B , (συμβ. $A \cup B$)** είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν είτε στο A ή στο B .



Ορισμοί

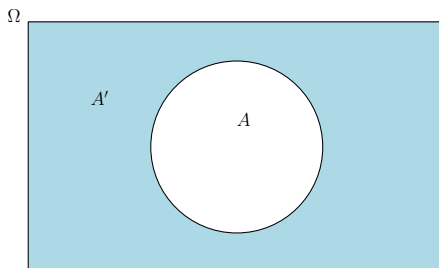
Έστω δύο σύνολα A και B υποσύνολα του Ω .

- Τομή των A και B , (συμβ. $A \cap B$) είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν και στο A και στο B .



Ορισμοί

- Συμπλήρωμα του A , (συμβ. A^c ή A') είναι το σύνολο που τα στοιχεία του δεν ανήκουν στο A .

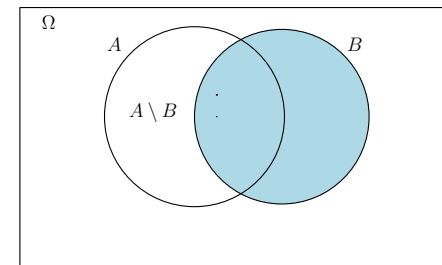


Ορισμοί

Έστω δύο σύνολα A και B υποσύνολα του Ω .

- Η διαφορά των A και B , (συμβ. $A \setminus B$) είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B

$$A \setminus B = A \cap B'$$



Κανόνες De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Παράδειγμα.

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Τότε

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2\}$
- $A' = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B \setminus A = \{3, 4\}$

Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

Έστω ότι ένα πείραμα έχει ως έκβαση ένα από τα n διαφορετικά αποτελέσματα τα οποία όμως **έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν**. Υποθέτουμε ότι k είναι τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο E . Τότε ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου E τον λόγο $\frac{k}{n}$,

$$P(E) = \frac{k}{n}.$$

Παράδειγμα 1. Έστω ότι σε ένα δοχείο υπάρχουν 17 όμοιες μπάλες: 9 κόκκινες και 8 μπλε. Επιλέγω τυχαία μια μπάλα. Θεωρώ ως E το ενδεχόμενο η μπάλα να είναι μπλε. Τότε αφού $n = 17$ και $k = 8$, σύμφωνα με τον ορισμό

$$P(E) = \frac{8}{17}.$$

Παράδειγμα 2. Ρίχνω ένα ζάρι. Θεωρώ ως E το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα του ζαριού να είναι περιττός αριθμός. Δηλαδή $E = \{1, 3, 5\}$, άρα

$$P(E) = \frac{3}{6}.$$

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας

Εαν επαναλάβουμε ένα πείραμα «πολλές φορές» και $N(E, n)$ είναι ο αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο E στις n πρώτες επαναλήψεις, τότε

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(E, n)}{n}.$$

Παράδειγμα. Αν ρίξουμε ένα ζάρι n φορές και μετρήσουμε τον αριθμό $N(E, n)$ των ρίψεων που έφεραν το αποτέλεσμα 2, θα παρατηρήσουμε ότι η σχετική συχνότητα $\frac{N(E, n)}{n}$ του αποτελέσματος 2 σταθεροποιείται γύρω από την τιμή $1/6$, καθώς ο συνολικός αριθμός των ρίψεων αυξάνει.

Παρατήρηση. Τόσο από τον ορισμό αυτό, όσο και από τον προηγούμενο, είναι φανερό ότι για κάθε ενδεχόμενο E :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος για ένα πείραμα τύχης. Τότε η πιθανότητα είναι ένας τρόπος για να αντιστοιχίζω αριθμούς σε ενδεχόμενα που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- 1 Για κάθε ενδεχόμενο A , $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 2 $P(\Omega) = 1$.
- 3 Για κάθε (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία **ξένων ανα δύο** ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots$ ισχύει

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

Δηλαδή, πιθανότητα είναι μια συνάρτηση από το σύνολο όλων των δυνατών ενδεχομένων στο διάστημα $[0, 1]$ που ικανοποιεί τις παραπάνω τρεις ιδιότητες.

Ορισμός

Δύο ενδεχόμενα A, B ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους** ή **ασυμβίβαστα** αν η πραγματοποίηση του ενός απαγορεύει την πραγματοποίηση του άλλου:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Ιδιότητες πιθανοτήτων

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) Αν A, B ενδεχόμενα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(3) Αν A, B ενδεχόμενα με $B \subset A$, τότε

α) $P(B) \leq P(A)$, και

β) $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

(4) Αν A, B **ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ιδιότητες πιθανοτήτων

(6) Για κάθε ενδεχόμενο A , ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$.

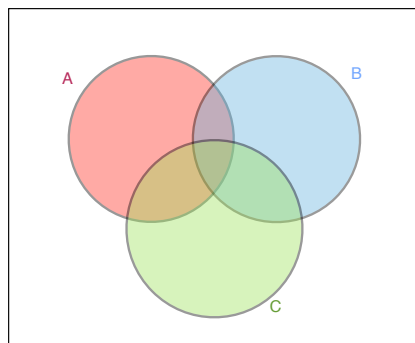
(7) Αν A, B ενδεχόμενα, τότε $P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$.

(8) Αν A, B ενδεχόμενα, τότε $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$.

Ιδιότητες πιθανοτήτων

(5) Αν A, B, C ενδεχόμενα, τότε

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$



Παράδειγμα

Από τους απόφοιτους πανεπιστημίων, 50% μιλούν Αγγλικά, 40% μιλούν Γαλλικά και 25% μιλούν και τις δύο γλώσσες. Ένας απόφοιτος πανεπιστημίου επιλέγεται για μια συνέντευξη.

(α) Ποια η πιθανότητα να μιλά Αγγλικά ή/και Γαλλικά;

(β) Ποια η πιθανότητα να μην μιλά ούτε τη μια ούτε την άλλη γλώσσα;

Λύση: Έστω A : ο απόφοιτος μιλά Αγγλικά και B : ο απόφοιτος μιλά Γαλλικά.

Τότε $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ και $P(A \cap B) = 0.25$. Άρα

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.25 = 0.65$.

β) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 0.35$.

Παράδειγμα

Σε μια μελέτη των αιτίων καταστροφής του οδοστρώματος βρέθηκε ότι στο 8% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε αστοχία υλικού, στο 85% των περιπτώσεων υπήρχε κατασκευαστική κακοτεχνία και στο 5% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης.

Με βάση τα ποσοστά αυτά, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε ένα συγκεκριμένο έλεγχο οδοστρώματος υπάρχει:

- (α) αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία,
- (β) αστοχία υλικού, αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία,
- (γ) το πολύ μία από τις αναφερόμενες αιτίες,
- (δ) καμιά από τις αναφερόμενες αιτίες.

Λύση

Έστω A : αστοχία υλικού, και K : κατασκευαστική κακοτεχνία.

Τότε $P(A) = 0.08$, $P(K) = 0.85$ και $P(A \cap K) = 0.05$.

- ❶ Αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία:
 $P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K) = 0.08 + 0.85 - 0.05 = 0.88$.
- ❷ Αστοχία υλικού, αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία:
 $P(A \setminus K) = P(A \cap K') = P(A) - P(A \cap K) = 0.08 - 0.05 = 0.03$.
- ❸ Το πολύ μία από τις αναφερόμενες αιτίες $\Leftrightarrow$ Να μην συντρέχουν και οι δύο.
 $P((A \cap K)') = 1 - P(A \cap K) = 1 - 0.05 = 0.95$.
- ❹ Καμιά από τις αναφερόμενες αιτίες
 $P(A' \cap K') = P((A \cup K)') = 1 - P(A \cup K) = 1 - 0.88 = 0.12$.

Παράδειγμα

Σε μια μελέτη των αιτίων διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος βρέθηκε ότι στο 10% των περιπτώσεων διακοπής υπήρχε βλάβη μετασχηματιστή, στο 75% των περιπτώσεων υπήρχε βλάβη γραμμής μεταφοράς και στο 2% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης.

Με βάση τα ποσοστά αυτά, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε μια συγκεκριμένη διακοπή ρεύματος υπάρχει:

- (α) βλάβη μετασχηματιστή ή βλάβη γραμμής μεταφοράς,
- (β) βλάβη μετασχηματιστή, αλλά όχι βλάβη γραμμής μεταφοράς,
- (γ) το πολύ ενός είδους βλάβη,
- (δ) καμιά από τις δύο αναφερόμενες βλάβες.

Λύση

Έστω C : βλάβη μετασχηματιστή, και L : βλάβη γραμμής μεταφοράς.

Τότε $P(C) = 0.10$, $P(L) = 0.75$ και $P(C \cap L) = 0.02$.

- ❶ Βλάβη μετασχηματιστή ή βλάβη γραμμής μεταφοράς:
 $P(C \cup L) = P(C) + P(L) - P(C \cap L) = 0.10 + 0.75 - 0.02 = 0.83$.
- ❷ Βλάβη μετασχηματιστή, αλλά όχι βλάβη γραμμής μεταφοράς:
 $P(C \setminus L) = P(C \cap L') = P(C) - P(C \cap L) = 0.10 - 0.02 = 0.08$.
- ❸ Το πολύ ενός είδους βλάβη $\Leftrightarrow$ Να μην συντρέχουν και τα δύο είδη βλάβης:
 $P((C \cap L)') = 1 - P(C \cap L) = 1 - 0.02 = 0.98$.
- ❹ Καμιά από τις δύο αναφερόμενες βλάβες:
 $P(C' \cap L') = P((C \cup L)') = 1 - P(C \cup L) = 1 - 0.83 = 0.17$.

Παράδειγμα

Η πιθανότητα να πάρει ένα αεροδρόμιο κάποιο βραβείο A για το σχεδιασμό του είναι 0.25, η πιθανότητα να πάρει κάποιο βραβείο B για την αποδοτική χρησιμοποίηση υλικών είναι 0.18, και η πιθανότητα να πάρει το βραβείο A , αλλά όχι το βραβείο B είναι 0.19.

Να βρεθούν οι εξής πιθανότητες γι' αυτό το αεροδρόμιο:

- (α) Να πάρει και τα δύο βραβεία.
- (β) Να πάρει τουλάχιστον ένα από τα δύο βραβεία.
- (γ) Να πάρει το πολύ ένα από τα δύο βραβεία.
- (δ) Να πάρει το βραβείο B , αλλά όχι το A .
- (ε) Να πάρει ακριβώς ένα από τα δύο βραβεία.

Λύση

- Να πάρει ακριβώς ένα από τα δύο βραβεία:

$$\begin{aligned} P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) & \quad (A \cap B' \text{ και } A' \cap B \text{ ασυμβίβαστα}) \\ &= P(A \cap B') + P(A' \cap B) \\ &= 0.19 + 0.12 = 0.31. \end{aligned}$$

Λύση

Έστω A : το ενδεχόμενο το αεροδρόμιο να πάρει το βραβείο A ,
και B : το ενδεχόμενο το αεροδρόμιο να πάρει το βραβείο B .
Τότε $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.18$ και $P(A \cap B') = 0.19$.

- Να πάρει και τα δύο βραβεία:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B') = 0.25 - 0.19 = 0.06.$$

- Να πάρει τουλάχιστον ένα από τα δύο βραβεία:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.18 - 0.06 = 0.37.$$

- Να πάρει το πολύ ένα από τα δύο βραβεία:

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.06 = 0.94.$$

- Να πάρει το βραβείο B , αλλά όχι το A :

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = 0.18 - 0.06 = 0.12.$$

Απαρίθμηση - στοιχεία συνδυαστικής

Βασική αρχή απαρίθμησης - ο πολλαπλασιαστικός κανόνας:

Αν ένα πείραμα μπορεί να αναλυθεί σε r υποπειράματα, όπου

- το πρώτο υποπείραμα έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα,
- το δεύτερο υποπείραμα έχει n_2 δυνατά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί στο πρώτο υποπείραμα,

⋮

- το r υποπείραμα έχει n_r δυνατά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα που θα εμφανιστούν στα $r - 1$ πρώτα υποπειράματα,

τότε το συνολικό πείραμα έχει

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$$

δυνατά αποτελέσματα.

Απαρίθμηση - στοιχεία συνδυαστικής

Παράδειγμα 1: Ένας άνδρας έχει 4 παντελόνια, 6 πουκάμισα, 8 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια.

Τότε (αν δεν λάβουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι κάποιοι από τους συνδυασμούς ρούχων μπορεί να είναι πιθανόν αστείοι) ο άνδρας αυτός μπορεί να ντυθεί με

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3 = 576$$

διαφορετικούς τρόπους.

Ορισμοί

Αν n είναι φυσικός, τότε ορίζουμε ως n παραγοντικό τον αριθμό

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \quad \text{και} \quad 0! = 1.$$

Π.χ.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

$\vdots$

$$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11 \cdot 12 = 479\,001\,600.$$

Προφανώς:

$$n! = (n-1)!n$$

Απαρίθμηση - στοιχεία συνδυαστικής

Παράδειγμα 2: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν 5 άνθρωποι σε μία σειρά;

Μπορούμε να αναλύσουμε το πρόβλημα ως εξής:

Ας φανταστούμε ότι θα φτιάξουμε τη σειρά επιλέγοντας έναν άνθρωπο κάθε φορά ξεκινώντας από την αρχή της σειράς. Τότε έχουμε:

- 5 δυνατές επιλογές για την 1η θέση
- 4 δυνατές επιλογές για την 2η θέση
- 3 δυνατές επιλογές για την 3η θέση
- 2 δυνατές επιλογές για την 4η θέση
- 1 μόνο επιλογή για την 5η θέση

επομένως

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Διατάξεις (χωρίς επανάληψη - επανατοποθέτηση)

Έστω n διαφορετικά αντικείμενα. Αν πάρουμε k από αυτά τα αντικείμενα ($1 \leq k \leq n$) και τα κατατάξουμε σε μια σειρά, τότε λέμε ότι παίρνουμε μια **διάταξη των n αντικειμένων ανά k** .

Ο αριθμός των διατάξεων των n αντικειμένων ανά k (χωρίς επανάληψη) συμβολίζεται με $P_{n,k}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$P_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$



Στις διατάξεις η σειρά έχει σημασία.

Διατάξεις (χωρίς επανάληψη - επανατοποθέτηση)

Παράδειγμα: Ένα διοικητικό συμβούλιο αποτελείται από 11 μέλη. Με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούν να επιλέξουν πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και ταμία;

Πρόεδρος	Αντιπρ.	Γραμμ.	Ταμίας
11	10	9	8

Άρα $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$ τρόπους.

Συνδυασμοί

Παράδειγμα: Ένα διοικητικό συμβούλιο αποτελείται από 11 μέλη. Με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούν να επιλέξουν 4 μέλη για να στελεχώσουν μια επιτροπή; Οι δυνατοί τρόποι είναι

$$C_{11,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!7!} = 330.$$

Συνδυασμοί

Έστω ένα σύνολο με n στοιχεία. Ένα οποιοδήποτε υποσύνολο με k στοιχεία ($0 \leq k \leq n$) από αυτό το σύνολο λέγεται **συνδυασμός των n αντικειμένων ανά k** .

Ο αριθμός των συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k συμβολίζεται με $C_{n,k}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P_{n,k}}{k!}.$$



Στους συνδυασμούς η σειρά δεν έχει σημασία.

Το «παράδοξο» του Chevalier de Méré

Antoine Gombaud
(1607 - 1684)



Ενδιαφερόταν για τα ακόλουθα τυχερά παιχνίδια: Στοιχηματίζω στο ενδεχόμενο

- Να φέρω έναν άσο σε 4 ρίψεις ενός ζαριού.
- Να φέρω ένα ζευγάρι άσων σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Πίστευε ότι τα δύο ενδεχόμενα ήταν ισοπίθανα. **Γιατί;**

Σε μία ρίψη ζαριού: $P(\text{να φέρω άσο}) = \frac{1}{6}$

Σε 4 ρίψεις ζαριού: $P(\text{να φέρω τουλαχ. ένα άσο}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Σε μία ρίψη ζεύγους ζαριών: $P(\text{να φέρω ζεύγος άσων}) = \frac{1}{36}$

Σε 24 ρίψεις ζεύγους ζαριών: $P(\text{να φέρω τουλαχ. ένα ζεύγος άσων}) = 24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$



Οι παραπάνω συλλογισμοί είναι λάθος!!!

Το «παράδοξο» του Chevalier de Méré

«Περιέργως» κέρδιζε συχνότερα στο πρώτο παιχνίδι απ' ό,τι στο δεύτερο!

Blaise Pascal (1623 - 1662)



Pierre de Fermat (1607 - 1665)



Το «παράδοξο» του Chevalier de Méré

1ο παιχνίδι:

$$\begin{aligned} P(\text{να κερδίσεις}) &= 1 - P(\text{να χάσεις}) \\ &= 1 - P(\text{να μην έρθει κανένας άσος σε 4 ρίψεις}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518 \end{aligned}$$

2ο παιχνίδι:

$$\begin{aligned} P(\text{να κερδίσεις}) &= 1 - P(\text{να χάσεις}) \\ &= 1 - P(\text{να μην έρθει κανένα ζεύγος άσων σε 24 ρίψεις}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα των γενεθλίων (birthday problem)

Έστω ότι σε ένα δωμάτιο βρίσκονται n άτομα. Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον δύο να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;

Υποθέσεις: Δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν δίσεκτα έτη, και υποθέτουμε ότι όλες οι ημέρες του χρόνου έχουν την ίδια πιθανότητα ως ημέρες γενεθλίων.

Έστω A το ενδεχόμενο τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το A' . Το A' μπορεί να επιτευχθεί με

$$365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1) \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Όλα τα πιθανά ενδεχόμενα είναι 365^n . Άρα

$$P(A') = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

n	4	16	23	32	40	56
$P(A)$	0.016	0.284	0.507	0.753	0.891	0.998

Ασκήσεις

- Πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε με 5 γράμματα χρησιμοποιώντας τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου εαν
 - και τα 5 γράμματα πρέπει να είναι διαφορετικά,
 - δεν έχουμε κάποιο περιορισμό.
- Πόσες είναι όλες οι δυνατές πινακίδες αυτοκινήτων της μορφής $LLLnnnn$, όπου L είναι γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου από το σύνολο $\{A,B,E,Z,H,I,K,M,N,O,P,T,Y,X\}$ και $nnnn$ αριθμός από το 1000 έως το 9999.
- Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί 4ψήφιοι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα (ψηφία 0,1).
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κάτσουν τρία άτομα A, B, Γ σε τρία καθίσματα;
 - Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα δύο άτομα A, B, σε τρία καθίσματα;
 - Αν επιλέξουμε τυχαία δύο από τα τρία άτομα για μια εργασία, πόσους συνδυασμούς θα έχουμε;
- 7 αυτοκίνητα σταθμεύουν σε 9 θέσεις στάθμευσης. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, εάν δεν μας ενδιαφέρει η θέση που καταλαμβάνει το κάθε αυτοκίνητο;

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Διαισθητικά, δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του A δεν επηρεάζει την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B .

Ορισμός

Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου πειράματος τύχης λέγονται **ανεξάρτητα** όταν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Παράδειγμα 1: Στρίβουμε δύο νομίσματα.

A = «το πρώτο νόμισμα δείχνει Κεφαλή»,

B = «το δεύτερο νόμισμα δείχνει Κεφαλή»

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow A, B \text{ ανεξάρτητα.}$$

Παράδειγμα 2: Ρίχνουμε δύο ζάρια.

A = «το πρώτο ζάρι δείχνει 5»,

B = «το δεύτερο ζάρι δείχνει 2»

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/6, P(A \cap B) = 1/36 \Rightarrow A, B \text{ ανεξάρτητα.}$$

Παράδειγμα 3: Τραβάμε δύο χαρτιά από μια τράπουλα.

A = «το πρώτο χαρτί είναι σπαθί»,

B = «το δεύτερο χαρτί είναι σπαθί»

$$P(A) = 13/52 = 1/4, P(B) = 1/4$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = 0.0588 < \frac{1}{16} = 0.0625.$$

Άρα τα A, B **δεν** είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4: Ρίχνουμε δύο ζάρια.

A = «το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 9»,

B = «το πρώτο ζάρι δείχνει 2»

$$A = \{(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \text{ αλλά } P(A \cap B) = 0 \text{ [(2, 7) είναι αδύνατο!]}$$

Γενικά, αν A και B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα που έχουν θετική πιθανότητα, τότε **δεν είναι ανεξάρτητα**, διότι

$$P(A)P(B) > 0 = P(A \cap B).$$

Γενίκευση

Ορισμός

Τρία ενδεχόμενα A , B και C του ίδιου πειράματος τύχης λέγονται **ανεξάρτητα** αν ισχύει ότι:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός τυχαίου πειράματος και B ένα ενδεχόμενο με $P(B) > 0$.

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** ενός ενδεχομένου A , δεδομένου του B , συμβολίζεται $P(A|B)$ και ορίζεται ως

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Όταν $P(B) = 0$ η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ δεν ορίζεται.

Στη δεσμευμένη πιθανότητα ο δειγματικός χώρος Ω έχει ουσιαστικά συρρικνωθεί στο B .

Δεσμευμένη πιθανότητα

Παράδειγμα: Ρίχνουμε δύο ζάρια.

A = «το πρώτο ζάρι δείχνει 3»,

B = «το άθροισμα των δύο ζαριών = 8»

$$B = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{36}.$$

Άρα

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}.$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ο ακόλουθος:

Κανόνας του γινομένου:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Παράδειγμα: Από μια τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγω στην τύχη δύο χαρτιά.

Έστω A = «το πρώτο χαρτί είναι σπαθί» και B = «το δεύτερο χαρτί είναι σπαθί».

- 1 Αναζητώ την πιθανότητα και τα δύο χαρτιά να είναι σπαθιά, δηλ. $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}.$$

- 2 Αναζητώ την πιθανότητα ακριβώς το ένα από τα δύο χαρτιά να είναι σπαθί, δηλ. $P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)]$.

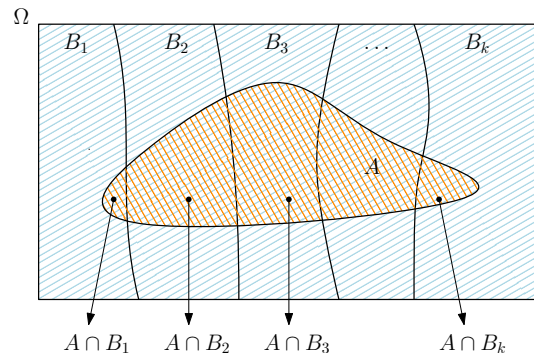
($A \cap B'$ και $A' \cap B$ είναι ασυμβίβαστα.)

$$\begin{aligned} P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] &= P(A \cap B') + P(A' \cap B) \\ &= P(A)P(B'|A) + P(A')P(B|A') \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 39}{51 \cdot 52} = \frac{13}{34}. \end{aligned}$$

Το θεώρημα της ολικής πιθανότητας

Έστω $B_1, B_2, \dots, B_k$ μια διαμέριση του Ω , δηλ. μια συλλογή ξένων ανά δύο συνόλων που η ένωσή τους είναι ο δειγματικός χώρος Ω .

Τότε αν $A \subset \Omega \Rightarrow A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_k$ είναι ασυμβίβαστα.



Παράδειγμα

Σε μια αποθήκη είναι αποθηκευμένα εξαρτήματα του ίδιου τύπου, που προέρχονται από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές Α, Β, Γ, και σε ποσοστά 50% από τον Α, 40% από τον Β, 10% από τον Γ.

Είναι γνωστό ότι οι προμηθευτές Α, Β, Γ παράγουν ελαττωματικά εξαρτήματα σε ποσοστά 6%, 10% και 15%, αντίστοιχα. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη ένα εξάρτημα από την αποθήκη.

Να βρεθεί η πιθανότητα να επιλέξουμε ελαττωματικό εξάρτημα.

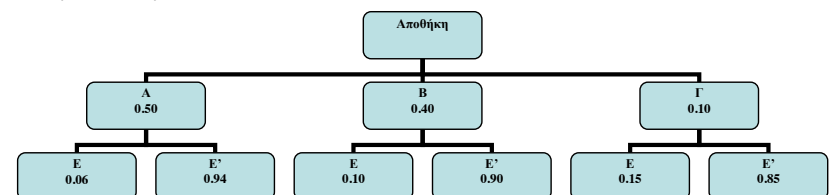
Το θεώρημα της ολικής πιθανότητας

Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^k P(A | B_i) P(B_i) \\ &= P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \dots + P(A | B_k) P(B_k). \end{aligned}$$

Λύση:

Έστω A, B, C τα ενδεχόμενα να επιλέξω το εξάρτημα των προμηθευτών Α, Β, Γ, αντίστοιχα, και E το ενδεχόμενο το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.



$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) \\ &= 0.06 \cdot 0.50 + 0.10 \cdot 0.40 + 0.15 \cdot 0.10 = 0.085 = 8.5\% \end{aligned}$$

Τύπος του Bayes

Κανόνας γινομένου για δεσμευμένες πιθανότητες:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

Άρα

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- $P(B)$: εκ των προτέρων πιθανότητα
- $P(B|A)$: εκ των υστέρων πιθανότητα
- A : «δεδομένα»

Αν χρησιμοποιήσουμε το Θ. ολικής πιθανότητας για την $P(A)$ έχουμε:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}.$$

Παράδειγμα 1

Σε μια εξέταση με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής ένας φοιτητής είτε γνωρίζει την απάντηση ή μαντεύει. Έστω ότι η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση είναι $1/2$. Επιπλέον, έστω ότι το πλήθος των πολλαπλών επιλογών σε κάθε ερώτηση είναι 5, οπότε ο φοιτητής που μαντεύει την απάντηση θα είναι σωστός με πιθανότητα $1/5$. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση σε μια ερώτηση με δεδομένο ότι απάντησε σωστά σε αυτήν;

Λύση

Έστω C το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απαντάει σωστά στην ερώτηση και K το ενδεχόμενο να γνωρίζει όντως την απάντηση.

Από τις υποθέσεις έχουμε $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(C|K') = \frac{1}{5}$.

Εμείς αναζητούμε την πιθανότητα $P(K|C)$.

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(K|C) = \frac{P(C|K) \cdot P(K)}{P(C)}.$$

Τώρα

$$P(C) = P(C|K) \cdot P(K) + P(C|K') \cdot P(K') = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

$$P(K|C) = \frac{P(C|K) \cdot P(K)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Παράδειγμα 2 (Spam filter)

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Bayes για να ελέγξουμε ανεπιθύμητη ηλεκτρονική αλληλογραφία. Ας υποθέσουμε ότι το στοιχείο για να χαρακτηριστεί ένα μήνυμα ως ανεπιθύμητο είναι να περιέχει στο θέμα την πρόταση «Αγαπητέ φίλε».

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- A : το μήνυμα περιέχει στο θέμα την πρόταση «Αγαπητέ φίλε».
- B : το μήνυμα είναι ανεπιθύμητο.

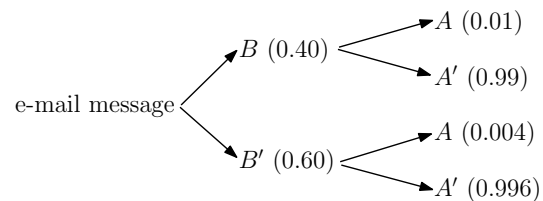
Θέλω να εκτιμήσω την πιθανότητα $P(B|A)$.

Υποθέσεις: Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι

- το 40% των μηνυμάτων είναι ανεπιθύμητα ($P(B) = 0.40$),
- το 1% των ανεπιθύμητων μηνυμάτων έχουν στο θέμα την πρόταση «Αγαπητέ φίλε» ($P(A|B) = 0.01$),
- το 0.4% των κανονικών μηνυμάτων έχουν αυτή την πρόταση στο θέμα τους ($P(A|B') = 0.004$).

Λύση

Από τις υποθέσεις μας κατασκευάζουμε το διάγραμμα:



$$\text{Bayes} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Τώρα

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B') \cdot P(B') = 0.01 \cdot 0.40 + 0.004 \cdot 0.60 = 0.0064.$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.01 \cdot 0.40}{0.0064} = 0.625.$$

Άρα κατα 63% αναμένουμε ότι το μήνυμα είναι ανεπιθύμητο.

Τύπος του Bayes

Γενικά, έστω $B_1, B_2, \dots, B_n$ μια **διαμέριση** του Ω και A είναι οποιοδήποτε ενδεχόμενο. Τότε

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)} \\ &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)}, \end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots, n$.

Ο κανόνας του Bayes χρησιμοποιείται συχνά για την αναθεώρηση των πιθανοτήτων διαφόρων ενδεχόμενων τα οποία προηγούνται χρονικά από άλλα ενδεχόμενα του πειράματος ή αποτελούν τις αιτίες των αποτελεσμάτων που έχουμε παρατηρήσει.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα με την αποθήκη, να βρεθεί η πιθανότητα το εξάρτημα που επιλέξαμε να προέρχεται από τον προμηθευτή Γ **δεδομένου ότι βρέθηκε ελαττωματικό**.

Λύση: Ζητάμε την $P(C|E)$.

$$\begin{aligned} \text{Bayes} \Rightarrow P(C|E) &= \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|C) \cdot P(C)}{P(E)} \\ &= \frac{0.10 \cdot 0.15}{0.085} = 0.1765 = 17.65\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα (The Monty Hall problem)

Σε ένα τηλεοπτικό πρόγραμμα υπάρχουν 3 κουρτίνες. Η μία κρύβει ένα αυτοκίνητο, ενώ πίσω από τις άλλες δύο υπάρχουν κατσίκες! Ο διαγωνιζόμενος επιλέγει μια από τις 3 κουρτίνες, και τότε ο οικοδεσπότης ανοίγει μία από τις κουρτίνες που κρύβει κατσίκα. Στη συνέχεια ρωτάει τον διαγωνιζόμενο κατά πόσον θέλει να αλλάξει την αρχική του επιλογή ή όχι.

Τι πρέπει να κάνει ο διαγωνιζόμενος; Να αλλάξει ή όχι την αρχική του επιλογή;

Υποθέσεις:

- Το αυτοκίνητο έχει τοποθετηθεί τυχαία πίσω από μια κουρτίνα, δηλαδή πριν διαλέξει ο διαγωνιζόμενος μια κουρτίνα έχει πιθανότητα 1/3 να βρεί το αυτοκίνητο.
- Ο οικοδεσπότης γνωρίζει ποιά κουρτίνα κρύβει το αυτοκίνητο και ανοίγει πάντα μια κουρτίνα που κρύβει κατσίκα. Αν έχει επιλογή μεταξύ δύο κουρτινών που κρύβουν κατσίκες ανοίγει μία από τις δύο στην τύχη.

Λύση: 1ος τρόπος

Αν K_1 είναι η μια κατσίκια, K_2 η δεύτερη, και A το αυτοκίνητο έχουμε τους ακόλουθους συνδυασμούς.

	Κουρτίνα 1	Κουρτίνα 2	Κουρτίνα 3
1)	A	K_1	K_2
2)	A	K_2	K_1
3)	K_1	A	K_2
4)	K_1	K_2	A
5)	K_2	A	K_1
6)	K_2	K_1	A

Έστω ότι ο διαγωνιζόμενος επιλέγει την κουρτίνα 1.

- Στην 1η περίπτωση ο οικοδεσπότης θα ανοίξει την κουρτίνα 2 ή την κουρτίνα 3, και ο διαγωνιζόμενος θα χάσει αν αλλάξει την αρχική του επιλογή.
- Στην 2η περίπτωση θα γίνει ότι και στην πρώτη.
- Στην 3η περίπτωση ο οικοδεσπότης θα ανοίξει την κουρτίνα 3, και ο διαγωνιζόμενος θα κερδίσει αν αλλάξει την αρχική του επιλογή.

Λύση: 1ος τρόπος

- Ανάλογα θα συμβούν και στις περιπτώσεις 4, 5 και 6.

Άρα σε 2/6 των περιπτώσεων κερδίζεις αν δεν αλλάξεις την αρχική σου επιλογή, και σε 4/6 των περιπτώσεων κερδίζεις αν την αλλάξεις. Επομένως

Η πιθανότητα να κερδίσεις αν αλλάξεις την αρχική σου επιλογή είναι 2/3.

Λύση: 2ος τρόπος

Αναλύουμε ξανά το πρόβλημα αν ο διαγωνιζόμενος έχει επιλέξει την κουρτίνα 1, και ο οικοδεσπότης έχει ανοίξει την κουρτίνα 3.

Έστω A_i το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο να είναι στην κουρτίνα i , και B το ενδεχόμενο ο οικοδεσπότης ανοίγει την κουρτίνα 3 ενώ ο ο διαγωνιζόμενος έχει επιλέξει την 1.

Αναζητώ την

$$P(\text{ο διαγωνιζόμενος παραμένει στην αρχική επιλογή και κερδίζει}) = P(A_1 | B).$$

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(B)}.$$

Προφανώς $P(A_1) = 1/3$, ενώ $P(B | A_1) = 1/2$, αφού ο οικοδεσπότης μπορεί να επιλέξει μεταξύ των κουρτινών 2 και 3.

Επίσης, από το θεώρ. ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(A_1 | B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα

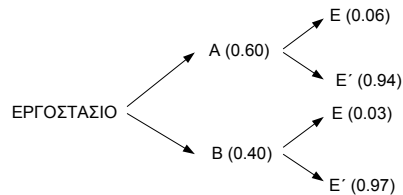
Μία αυτοκινητοβιομηχανία παράγει ένα συγκεκριμένο τύπο αυτοκινήτων σε δύο μόνο εργοστάσια. Στο εργοστάσιο Α παράγεται το 60% του συνολικού αριθμού του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου και στο εργοστάσιο Β παράγεται το 40% του συνολικού αριθμού του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου. Είναι γνωστό ότι το 6% του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτων που προέρχονται από το Α παρουσιάζουν ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης, και το 3% του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτων που προέρχονται από το Β παρουσιάζουν ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης.

- 1 Υπολογίστε την πιθανότητα ένα αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου να παρουσιάσει ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης του.
- 2 Υπολογίστε την πιθανότητα ένα αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου που παρουσίασε ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης του να έχει παραχθεί στο εργοστάσιο Α.

Λύση:

Έστω A : το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο να έχει παραχθεί στο εργοστάσιο A ,
 B : το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο να έχει παραχθεί στο εργοστάσιο B , και
 E : το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο να παρουσίασε ελάττωμα στο χρόνο εγγύησης.

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα για να φτιάξουμε το ακόλουθο διάγραμμα



1. Από το Θ , ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0.6 \cdot 0.06 + 0.4 \cdot 0.03 = 0.048.$$

2. Από τον τύπο του Bayes έχουμε

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0.06 \cdot 0.6}{0.048} = 0.75.$$

Ασκήσεις

- Το κουτί I περιέχει 3 κόκκινους και 2 μπλε βώλους, ενώ το κουτί II περιέχει 2 κόκκινους και 8 μπλε βώλους. Στρίβω ένα δίκαιο νόμισμα. Αν έρθει κεφαλή διαλέγω έναν βώλο από το κουτί I, ενώ αν έρθει γράμματα διαλέγω έναν βώλο από το κουτί II. Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινος βώλος.
- Ρίχνουμε ένα κόκκινο και ένα πράσινο ζάρι. Έστω A = «το κόκκινο ζάρι δείχνει 2 ή 5» και B = «το άθροισμα των δύο ζαριών είναι τουλάχιστον 7». Είναι τα ενδεχόμενα A και B ανεξάρτητα;

Ασκήσεις

- Στρίβουμε ένα τίμιο νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν:
(α) 3 φορές κεφαλή,
(β) 2 φορές γράμματα και 1 κεφαλή,
(γ) τουλάχιστον 1 κεφαλή, και
(δ) το πολύ 1 γράμματα.
- Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί τουλάχιστον ένα 4 σε δύο ρίψεις ενός (τίμιου) ζαριού;
- Ένα κουτί περιέχει 4 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες, ενώ ένα άλλο κουτί περιέχει 3 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες. Τραβάμε μια μπάλα από κάθε κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα:
(α) να είναι και οι δύο άσπρες;
(β) να είναι και οι δύο μαύρες;
(γ) να είναι μία άσπρη και μία μαύρη;

Ασκήσεις

- Λόγω ενός σφάλματος που δημιουργήθηκε στο Internet τα πακέτα δεδομένων μεταξύ υπολογιστών τα οποία αποστέλλονται από Θεσσαλονίκη προς Αθήνα δρομολογούνται μέσω Ιωαννίνων με πιθανότητα $1/3$. Ένα πακέτο δεδομένων που δρομολογείται μέσω Ιωαννίνων έχει πιθανότητα $1/3$ να χαθεί μέχρι να φτάσει στην Αθήνα. Αν πάλι ένα πακέτο δεδομένων δεν δρομολογηθεί μέσω Ιωαννίνων τότε έχει πιθανότητα $1/4$ να χαθεί.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να χαθεί ένα πακέτο δεδομένων από Θεσσαλονίκη προς Αθήνα;
(β) Ποια η πιθανότητα ένα πακέτο δεδομένων που έφτασε στην Αθήνα να ήρθε μέσω Ιωαννίνων;