

Προβλήματα Αρχικών Τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Υπενθύμιση: Ο τύπος του Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, και έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $1, 2, \dots, (n + 1)$ στο I , τότε για κάθε x και ξ στο I ισχύει

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x - \xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!}(x - \xi)^{n+1}, \quad (1)$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x (και εξαρτάται και από τους δύο).

Σε συμπαγή μορφή η (1) γράφεται ως εξής:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k + E_{n+1}, \quad (2)$$

όπου ο όρος υπολοίπου E_{n+1} δίνεται από την σχέση

$$E_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!} (x - \xi)^{n+1},$$

με η όπως παραπάνω.

Ο τύπος του Taylor

Ισοδύναμα, αν στην (1) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $x \leftarrow x + h$ και $\xi \leftarrow x$, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση του τύπου του Taylor.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, και έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $1, 2, \dots, (n + 1)$ στο I , τότε για κάθε x στο I ισχύει

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n)!} h^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} h^{n+1}}_{E_{n+1}}, \quad (3)$$

όπου το h είναι οποιοσδήποτε αριθμός τέτοιος ώστε $x + h \in I$, και η είναι ένας αριθμός μεταξύ των x και $x + h$.

Ο όρος υπολοίπου E_{n+1}

Ο όρος E_{n+1} εξαρτάται από το h με δύο τρόπους:

- α) λόγω της ύπαρξης του όρου h^{n+1} , και
- β) επειδή το η εξαρτάται εν γένει από το h .

Καθώς το $h \rightarrow 0$, ο όρος E_{n+1} συγκλίνει και αυτός προς το μηδέν, ουσιαστικά τόσο γρήγορα όσο γρήγορα το $h^{n+1} \rightarrow 0$.

Για να εκφράσουμε αυτό το ποιοτικό αποτέλεσμα γράφουμε

$$E_{n+1} = O(h^{n+1}) \quad \text{καθώς } h \rightarrow 0.$$

Η γραφή αυτή λέγεται **συμβολισμός του μεγάλου όμικρον** και είναι συντομογραφία της ανίσωσης

$$|E_{n+1}| \leq C |h|^{n+1}, \quad \text{όπου το } C \text{ είναι σταθερά.}$$

(Χονδρικά, λέμε ότι η σχέση $E_{n+1} = O(h^{n+1})$ υποδηλώνει ότι το E_{n+1} έχει παρόμοια συμπεριφορά με την πολύ απλούστερη έκφραση h^{n+1} .)

Ο τύπος του Taylor

Ουσιαστικά, η (3) αντιστοιχεί σε μια ακολουθία θεωρημάτων, ένα για κάθε τιμή του n . Π.χ.,

$$\begin{aligned}n = 0 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(\eta_1) h \\ &= f(x) + O(h),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n = 1 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(\eta_2)}{2} h^2 \\ &= f(x) + f'(x) h + O(h^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n = 2 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \frac{f'''(\eta_3)}{6} h^3 \\ &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + O(h^3).\end{aligned}$$

Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ)

Μια ΣΔΕ είναι μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι συνάρτηση και όχι αριθμός, και περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης (που είναι επίσης άγνωστες).

Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι **μια ΣΔΕ συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με κάποιες από τις παραγώγους της**. Π.χ., η ακόλουθη είναι μια ΔΕ

$$y'(t) = y(t). \quad (4)$$

Προφανώς η $y(t) = e^t$ είναι μια λύση της (4) αφού $(e^t)' = e^t$.

Είναι η λύση αυτή μοναδική;

Όχι. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y(t) = Ce^t$, για αυθαίρετο $C \in \mathbb{R}$. Τότε

$$(Ce^t)' = C(e^t)' = Ce^t,$$

για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό C . Άρα η ΣΔΕ (4) έχει πολλές (άπειρες) λύσεις.

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Η γενική μορφή μιας ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (5)$$

Αν γνωρίζουμε τη γενική λύση της (5) και θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης y σ' ένα σημείο, π.χ.

$$y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

όπου t_0 και y_0 είναι δοσμένες πραγματικές σταθερές.

Η συνθήκη (6) ονομάζεται **αρχική συνθήκη**, ενώ η εξίσωση (5) μαζί με την (6), λέμε ότι αποτελούν ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)**.

Παράδειγμα.

Θα λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Για να βρούμε τη γενική λύση ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$y'(t) = 3t^2 \Rightarrow \int y'(t) dt = \int 3t^2 dt \Rightarrow y(t) = t^3 + C.$$

Γνωρίζουμε ότι $y(0) = 1$, άρα θα πρέπει

$$y(0) = 0^3 + C \Leftrightarrow 1 = 0 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

Επομένως, το ΠΑΤ (7) έχει λύση $y(t) = t^3 + 1$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(t, y)$ λέμε ότι ικανοποιεί **τη συνθήκη του Lipschitz** ως προς y ομοιόμορφα ως προς t σε ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$, αν υπάρχει σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|,$$

για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. Η L λέγεται σταθερά του Lipschitz για την f .

Παράδειγμα

$$D = \{(t, y) : 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\} \text{ και } f(t, y) = t|y|.$$

Έστω $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. Τότε

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t| ||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

Η $L = 2$ είναι η μικρότερη δυνατή τιμή για τη σταθερά Lipschitz σε αυτό το πρόβλημα μιας και

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0| = 2.$$

Θεώρημα

Έστω $D = \{(t, y) : a \leq t \leq b, y \in \mathbb{R}\}$ και έστω $f(t, y)$ συνεχής στο D . Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t στο D , τότε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $y(t)$ για $t \in [a, b]$.

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t \sin(ty), & 0 \leq t \leq 2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Η $f(t, y) = 1 + t \sin(ty)$ είναι συνεχής. Επιπλέον,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + t \sin(ty_1) - 1 - t \sin(ty_2)| = |t| |\sin(ty_1) - \sin(ty_2)|.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \sin(ty_1) - \sin(ty_2) &= 2 \sin \frac{ty_1 - ty_2}{2} \cos \frac{ty_1 + ty_2}{2} \\ \Rightarrow |\sin(ty_1) - \sin(ty_2)| &= 2 \underbrace{\left| \sin \frac{ty_1 - ty_2}{2} \right|}_{\leq \frac{|t| |y_1 - y_2|}{2}} \underbrace{\left| \cos \frac{ty_1 + ty_2}{2} \right|}_{\leq 1}. \end{aligned}$$

$$\therefore |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq |t| 2 \frac{|t| |y_1 - y_2|}{2} = t^2 |y_1 - y_2| \leq 4 |y_1 - y_2|.$$

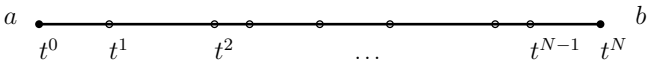
Άρα το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

Η μέθοδος του Euler

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θεωρούμε έναν διαμερισμό του $[a, b]$:



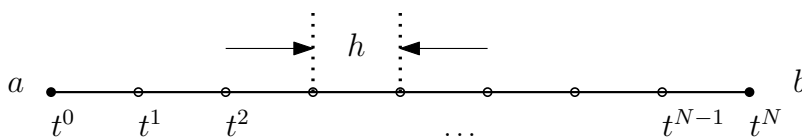
Θέλουμε να βρούμε έναν τρόπο να υπολογίζουμε **προσεγγίσεις** της ακριβούς λύσης στους **κόμβους** t^n , $n = 0, 1, \dots, N$.

Θα συμβολίζουμε με y^n την προσέγγιση της ακριβούς λύσης στον κόμβο t^n . Δηλ.

$$y^n \approx y(t^n)$$

Θεωρούμε έναν **ομοιόμορφο** διαμερισμό.

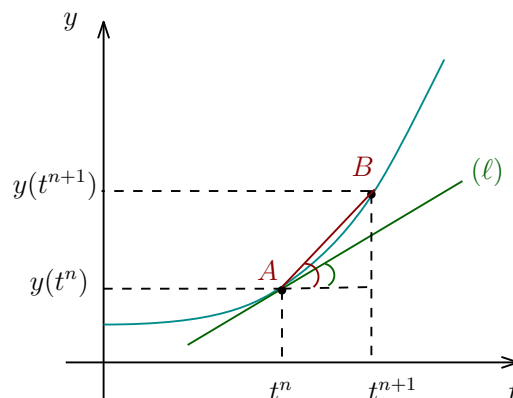
Δηλ. κάθε υποδιάστημα $[t^{n-1}, t^n]$, $n = 1, 2, \dots, N$, έχει μήκος (βήμα) $h = \frac{b-a}{N}$.



Άρα οι κόμβοι $t^n := a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Αν το h είναι «μικρό» μπορούμε να πούμε ότι:

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$



Η μέθοδος του Euler

Επομένως

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx y'(t^n) \stackrel{\Delta.E.}{=} f(t^n, y(t^n)),$$

και, αν συμβολίσουμε $y^n \approx y(t^n)$, καταλήγουμε στο σχήμα:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n) \Leftrightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n).$$

Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο αριθμητικό σχήμα:

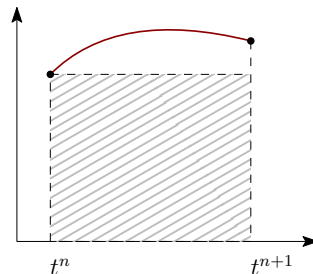
Μέθοδος του Euler

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h f(t^n, y^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ y^0 &= y_0. \end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος κατασκευής της μεθόδου του Euler

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \\ &\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τον αριστερό τύπο του ορθογωνίου:



$$\begin{aligned} y(t^{n+1}) - y(t^n) &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h f(t^n, y(t^n)) \\ &\Rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n). \end{aligned}$$

Τρίτος τρόπος κατασκευής της μεθόδου του Euler

Θεωρούμε ότι η λύση μας $y(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τον τύπο του Taylor ως εξής:

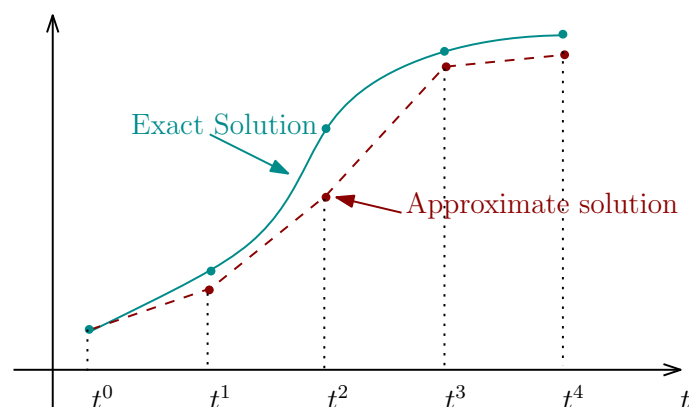
$$\begin{aligned}y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + \frac{y''(\eta)}{2}h^2 \\&= y(t) + h y'(t) + O(h^2) \\&\stackrel{\text{Δ.Ε.}}{=} y(t) + h f(t, y(t)) + O(h^2).\end{aligned}$$

Άρα, αν το h είναι «αρκετά μικρό», έχουμε για $t = t^n$ ότι:

$$\begin{aligned}y(t^n + h) &\approx y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)). \\ \Rightarrow y^{n+1} &= y^n + h f(t^n, y^n).\end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του Euler

$$f(t^n, y^n) \approx y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)).$$



Ψευδοκώδικας της μεθόδου του Euler

```
Είσοδος:  $a, b, y_0, N$   
Εξωτερική συνάρτηση  $f$   
 $h \leftarrow (b - a)/N$   
 $t \leftarrow a$   
 $y \leftarrow y_0$   
for  $k = 1, \dots, N$  do  
     $y \leftarrow y + h f(t, y)$   
     $t \leftarrow t + h$   
end for
```

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t + 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Έστω $N = 10$, $h = (1 - 0)/10 = 0.1$, $t^n = 0.1n$, $n = 0, 1, \dots, 10$.

$$y^0 = y(0) = 1$$

$$y^1 = y^0 + h f(t^0, y^0) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$$

$$y^2 = y^1 + h f(t^1, y^1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$$

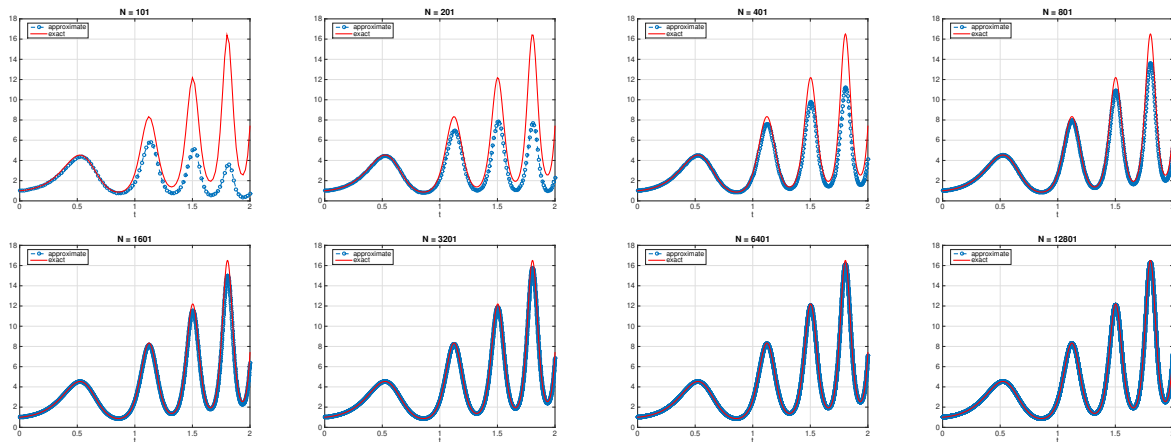
$$\vdots$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = y(1 + 4\pi t \cos(2\pi t^2)), & 0 \leq t \leq 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Η ακριβής λύση είναι:

$$y(t) = e^{t + \sin(2\pi t^2)}.$$



N	101	201	401	801	1601	3201	6401
error	12.9977	8.8949	5.3291	2.9381	1.5463	0.7396	0.4020

Σφάλματα της μεθόδου

Ορισμός

- Το σφάλμα $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ λέγεται **σφάλμα διακριτοποίησης** ή σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου. Συνήθως λέγεται **ολικό σφάλμα**.
- **Τοπικό σφάλμα της μεθόδου του Euler στο σημείο t^n** , $n = 0, 1, \dots, N - 1$, λέγεται η ποσότητα

$$\delta^n := [y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))] - y(t^{n+1}).$$

Δηλαδή, το τοπικό σφάλμα είναι το σφάλμα που κάνουμε αν εκτελέσουμε **ένα βήμα** της μεθόδου του Euler ξεκινώντας από το σημείο $(t^n, y(t^n))$ (και όχι από το (t^n, y^n) όπως γίνεται στην πράξη).

Υπολογισμός τοπικού σφάλματος

$$\begin{aligned}\delta^n &:= [y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))] - y(t^{n+1}) \\ &= y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) - y(t^n + h)\end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε με Taylor τον όρο $y(t^n + h)$ γύρω από το σημείο t^n . Άρα

$$\begin{aligned}\delta^n &= y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) - \left[y(t^n) + h \underbrace{y'(t^n)}_{f(t^n, y(t^n))} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \right] \\ &= y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) - y(t^n) - hf(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ &= -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n).\end{aligned}$$

Άρα η τάξη του τοπικού σφάλματος της μεθόδου του Euler είναι 2.

Παρατήρηση

Διαισθητικά (και πολύ χονδρικά) μπορεί κανείς να πει ότι επειδή κάνουμε $N = \frac{b-a}{h}$ βήματα για να φτάσουμε στο b , τα τοπικά σφάλματα συσσωρεύονται και έτσι η τάξη του σφάλματος διακριτοποίησης αναμένουμε να είναι κατά ένα μικρότερη από την τάξη του τοπικού σφάλματος.

Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο:

Θεώρημα

Έστω $D = \{(t, y) : a \leq t \leq b, y \in \mathbb{R}\}$ και έστω $f(t, y)$ συνεχής στο D που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t στο D . Έστω y δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Αν $y^0, y^1, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler για τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ με βήμα $h = (b - a)/N$, τότε ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L} (e^{L(b-a)} - 1) h,$$

όπου $M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$ και L η σταθερά Lipschitz.

Αρα, λέμε ότι η μέθοδος του Euler έχει **τάξη ακρίβειας** τουλάχιστον 1.

(Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ακριβώς 1.)

Για να δείξουμε ότι όσο ομαλή και να θεωρήσουμε τη λύση δεν μπορεί να βελτιωθεί (αυξηθεί) ο εκθέτης του h στο σφάλμα, θεωρούμε το πολύ απλό Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Το πρόβλημα (8) έχει μοναδική λύση: $y(t) = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

Έστω φυσικός N , $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ και $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler.

$$y^{n+1} = y^n + h2t^n \Rightarrow y^{n+1} = y^n + 2nh^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$n = 0 : y^1 = y^0$$

$$n = 1 : y^2 = y^1 + 2h^2 = y^0 + 2h^2$$

$$n = 2 : y^3 = y^2 + 2 \cdot 2h^2 = y^0 + 2h^2 + 2 \cdot 2h^2 = y^0 + 2(1 + 2)h^2$$

$$\vdots$$

$$n : y^n = y^0 + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))h^2 = y^0 + 2 \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

Όμως

$$y^0 = 0 \Rightarrow y^n = n(n-1)h^2, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Άρα για $n = N$ έχουμε:

$$y^N = N(N-1)h^2 = \underbrace{Nh}_{=1}(\underbrace{Nh}_{=1} - h) = 1 - h.$$

Επομένως, το σφάλμα στο σημείο $t = t^N = 1$, είναι ακριβώς ίσο με:

$$y(1) - y^N = 1 - (1 - h) = h.$$

Ευστάθεια της μεθόδου του Euler

Θεωρούμε τα Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z'(t) = f(t, z), & a \leq t \leq b, \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

με f να πληροί τις υποθέσεις που εξασφαλίζουν ότι για δεδομένες αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, τα Π.Α.Τ. έχουν μοναδικές λύσεις y, z που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Τότε, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αποδείξει κανείς την ακόλουθη ανισότητα:

$$\max_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|. \quad (9)$$

Η (9) εκφράζει τη συνεχή εξάρτηση των λύσεων του Π.Α.Τ. από τα αρχικά δεδομένα.

... ανάλογα για τις προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler

Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ σε N υποδιαστήματα μήκους h , και y^n, z^n , $0 \leq n \leq N$, είναι οι λύσεις των προβλημάτων

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \\ y^0 = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z^{n+1} = z^n + hf(t^n, z^n), \\ z^0 = z_0, \end{cases}$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Αποδεικνύεται ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|. \quad (10)$$

Η (10) είναι το διακριτό ανάλογο της (9) και εκφράζει την **ευστάθεια της αριθμητικής λύσης σε διαταραχές των αρχικών δεδομένων**.

Παρόλα αυτά, αυτή η έννοια της «ευστάθειας» της μεθόδου του Euler **δεν έχει μεγάλη πρακτική χρησιμότητα**.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το απλό γραμμικό ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \quad \text{όπου } \lambda < 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Ακριβής λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$. Επειδή $\lambda < 0$, $y(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Θεωρούμε τους κόμβους $t^n = nh$, $n = 0, 1, \dots$

Τότε η ακολουθία $(y^n)_{n \geq 0}$ των προσεγγίσεων της μεθόδου του Euler δίνεται από την αναδρομική σχέση

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n = (1 + h\lambda) y^n, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ y^0 = 1. \end{cases}$$

Προφανώς

$$\begin{aligned}y^1 &= (1 + h\lambda) y^0 = (1 + h\lambda), \\y^2 &= (1 + h\lambda) y^1 = (1 + h\lambda)^2, \\&\vdots \\y^n &= (1 + h\lambda) y^{n-1} = (1 + h\lambda)^n.\end{aligned}$$

Άρα η (y^n) έχει τύπο:

$$y^n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Αν σταθεροποιήσουμε ένα $t > 0$, τότε η μέθοδος του Euler δίνει y^n που συγκλίνουν στη λύση $e^{\lambda t}$ του συνεχούς προβλήματος καθώς $h \rightarrow 0$.

Για να το δούμε αυτό ας θεωρήσουμε $nh = t$, έτσι ώστε $n \rightarrow \infty$ καθώς $h \rightarrow 0$. Τότε έχουμε

$$y^n = (1 + h\lambda)^n = \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n \rightarrow e^{\lambda t}, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Στην πράξη οι υπολογισμοί γίνονται με ένα μικρό μεν αλλά θετικό βήμα h .

Από την (12) έχουμε ότι για $n \geq 0$,

$$|y^n| = |1 + h\lambda|^n.$$

Άρα για **σταθερό** h , καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλαδή καθώς $t^n = nh \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}|y^n| &\rightarrow 0, & \text{όταν} & \quad |1 + h\lambda| < 1, \\|y^n| &= 1, & \text{όταν} & \quad |1 + h\lambda| = 1, \\|y^n| &\rightarrow \infty, & \text{όταν} & \quad |1 + h\lambda| > 1.\end{aligned}$$

Άρα, οι προσεγγίσεις y^n που δίνει η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα δοκιμής (11), για ένα σταθερό $h > 0$, μιμούνται τη συμπεριφορά της ακριβούς λύσης $e^{\lambda t}$ (δηλαδή $y^n \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$) μόνον όταν

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad h\lambda \in (-2, 0).$$

Επίσης, οι προσεγγίσεις ικανοποιούν τη συνθήκη $|y^n| \leq 1$, για κάθε $n \geq 0$, αν και μόνον αν

$$|1 + h\lambda| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad h\lambda \in [-2, 0].$$

Απόλυτη ευστάθεια

Γενικώς, λέμε ότι μια μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

είναι **απόλυτα ευσταθής** για κάποιο $h > 0$, αν, όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \quad \text{όπου } \lambda < 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

παράγει προσεγγίσεις y^n που παραμένουν **φραγμένες** καθώς $n \rightarrow \infty$.

Το διάστημα I της μορφής $[a, 0]$, με $-\infty \leq a \leq 0$, τέτοιο ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής για $h\lambda \in I$ λέγεται **διάστημα απόλυτης ευστάθειας** της μεθόδου.

Άρα η μέθοδος του Euler έχει διάστημα απόλυτης ευστάθειας το $I = [-2, 0]$ και επομένως είναι απολύτως ευσταθής για $0 \leq h \leq -\frac{2}{\lambda}$.

Άρα αν $|\lambda| \gg 1$, τότε το μέγιστο βήμα h που μπορούμε να πάρουμε πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να πάρουμε αποδεκτές προσεγγίσεις για το πρόβλημα δοκιμής.

Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

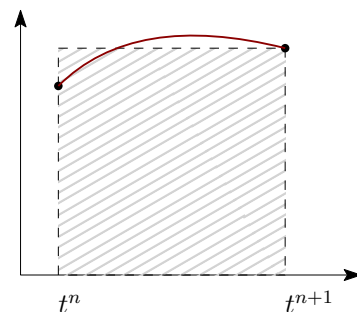
Έστω το Π.Α.Τ.
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

και ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$ με «βήμα» $h = (b - a)/N$ και κόμβους $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Ολοκληρώνοντας την Δ.Ε. στο $[t^n, t^{n+1}]$:
$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τον δεξιό τύπο του ορθογωνίου,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$



$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αν συμβολίσουμε y^n την προσέγγιση της $y(t^n)$ στο t^n , καταλήγουμε στην **πεπλεγμένη μέθοδο του Euler**:

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y^0 &= y_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Προσοχή! Το y^{n+1} δίνεται στην (13) πεπλεγμένα, δηλαδή για να το προσδιορίσουμε πρέπει σε κάθε βήμα να λύνουμε μια μη γραμμική εξίσωση.

Παρατηρήσεις

Η επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης μπορεί φυσικά να γίνει με παραδοσιακές μεθόδους, όπως η μέθοδος του Νεύτωνα, της τέμνουσας, κ.λ.π., αλλά, εν γένει, αυτή είναι μια **δαπανηρή διαδικασία**.

Συνήθως για τον υπολογισμό του y^{n+1} σε κάθε βήμα χρησιμοποιούμε μια **απλή επαναληπτική μέθοδο**.

Συγκεκριμένα, αν

$$\varphi(x) := y^n + h f(t^{n+1}, x),$$

ο υπολογισμός της y^{n+1} ανάγεται στην εύρεση σταθερού σημείου της φ .

Επομένως, δοθείσης μιας αρχικής προσέγγισης y_0^{n+1} της ζητούμενης τιμής y^{n+1} , κατασκευάζουμε μια ακολουθία $y_0^{n+1}, y_1^{n+1}, \dots$, μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$y_{j+1}^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y_j^{n+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Αποδεικνύεται ότι αν το h είναι αρκούντως μικρό, τότε $y_j^{n+1} \rightarrow y^{n+1}$, καθώς $j \rightarrow \infty$.

Ευστάθεια της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \quad \text{όπου } \lambda < 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

του οποίου η ακριβής λύση είναι $y(t) = e^{\lambda t}$.

Θεωρούμε τους κόμβους $t^n = nh$, $n = 0, 1, \dots$, οπότε η ακολουθία $(y^n)_{n \geq 0}$ των προσεγγίσεων της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler δίνεται από την αναδρομική σχέση

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Rightarrow (1 - h\lambda) y^{n+1} = y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y^n,$$

για $n = 0, 1, \dots$, με $y^0 = 1$.

... ευστάθεια της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler

Προφανώς

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{1}{1 - h\lambda} y^0 = \frac{1}{1 - h\lambda}, \\ y^2 &= \frac{1}{1 - h\lambda} y^1 = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^2, \\ &\vdots \\ y^n &= \frac{1}{1 - h\lambda} y^{n-1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (y^n) έχει τύπο $y^n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n$ και θα είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |1 - h\lambda| \geq 1.$$

Η τελευταία όμως αληθεύει για κάθε «βήμα» h , **άρα η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι απόλυτα ευσταθής για κάθε $h \in \mathbb{R}$.**

Τάξη ακρίβειας της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler

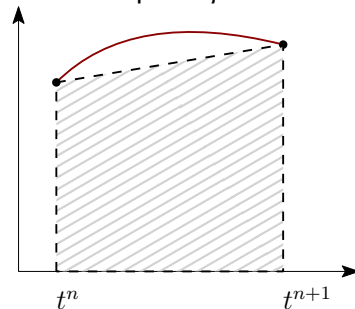
Αποδεικνύεται ότι κάτω από κάποιες προϋποθέσεις για την f και την y , και η πεπλεγμένη Euler έχει **τάξη ακρίβειας 1**, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά C που είναι ανεξάρτητη του βήματος h τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C h.$$

Η μέθοδος του τραπεζίου

Έστω τώρα ότι προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τον κανόνα του τραπεζίου:

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \\ & \approx \frac{h}{2} [f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))], \end{aligned}$$



$$\therefore y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2} [f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))].$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (15)$$

$$y^0 = y_0.$$

Αποδεικνύεται ότι κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις για την f και την y το τοπικό σφάλμα της μεθόδου είναι $\delta^n = -\frac{1}{12} h^3 y'''(\xi_n)$.

Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του τραπεζίου είναι 2, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά C , ανεξάρτητη του βήματος h , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C h^2.$$

Επιπλέον, η μέθοδος του τραπεζίου είναι **απόλυτα ευσταθής για κάθε $h > 0$** .

Τέλος, αν στη μέθοδο του τραπεζίου αντικαταστήσουμε την τιμή y^{n+1} στο β' μέλος από την εκτίμηση που μας δίνει η μέθοδος του Euler, προκύπτει η λεγόμενη **μέθοδος του Heun**:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^n + h f(t^n, y^n))], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (16)$$
$$y^0 = y_0.$$

Η μέθοδος αυτή είναι **άμεση, δεύτερης τάξης**, αλλά **δεν είναι πλέον απολύτως ευσταθής για οποιαδήποτε τιμή του h** .

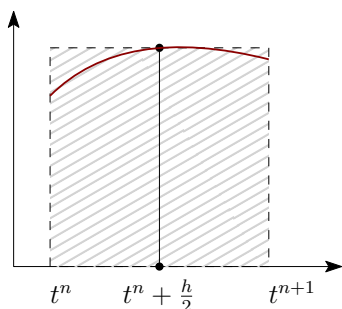
Γενικεύσεις της μεθόδου του Euler. Μέθοδοι Runge-Kutta

Το πρόβλημα της κατασκευής μιας αριθμητικής μεθόδου μπορεί να τεθεί ως ένα πρόβλημα προσέγγισης του ακριβούς προβλήματος

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Μέχρι τώρα είδαμε διάφορες μεθόδους που προκύπτουν ανάλογα με τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση του [ολοκληρώματος](#) στο δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό και προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τον κανόνα του μέσου καταλήγουμε στη σχέση:



$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h f\left(t^n + \frac{h}{2}, y\left(t^n + \frac{h}{2}\right)\right).$$

Αν προσεγγίσουμε την τιμή $y(t^n + \frac{h}{2})$ με τη μέθοδο του Euler, δηλαδή

$$y(t^n + \frac{h}{2}) \approx y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n, y^n),$$

καταλήγουμε στην **βελτιωμένη μέθοδο του Euler** ή **άμεση μέθοδο του μέσου**:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ y^0 &= y_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Όλες αυτές οι μέθοδοι εντάσσονται στη γενικότερη κατηγορία των **μεθόδων Runge-Kutta**.

Μέθοδοι Runge-Kutta

Μέθοδοι Runge-Kutta

Γενικά, μια **μέθοδος Runge-Kutta** (RK) με q ενδιάμεσα στάδια υπολογίζει την προσέγγιση y^{n+1} από την y^n ($y^0 = y_0$) μέσω του τύπου:

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (18)$$

όπου b_i , $1 \leq i \leq q$, είναι δεδομένες πραγματικές σταθερές.

Οι ενδιάμεσες τιμές $y^{n,i}$, $1 \leq i \leq q$, και τα αντίστοιχα σημεία $t^{n,i}$, $1 \leq i \leq q$, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} t^{n,i} &= t^n + \tau_i h, \quad 1 \leq i \leq q, \\ y^{n,i} &= y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad 1 \leq i \leq q. \end{aligned} \quad (19)$$

Παρατηρήσεις

- Θυμηθείτε ότι ένας κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει τη γενική μορφή

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^q w_i f(x_i),$$

όπου w_i είναι τα βάρη και x_i είναι οι κόμβοι ολοκλήρωσης.

Άρα στον τύπο (18) μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα hb_i ως βάρη, ενώ τα $f(t^{n,i}, y^{n,i})$ είναι προσεγγίσεις της $f(t, y(t))$ σε q κόμβους $t^{n,i}$ στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$.

- Συνήθως οι παράμετροι μιας μεθόδου RK γράφονται σε μορφή **μητρώου Butcher**,

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

Παρατηρήσεις

- Αν ο πίνακας a_{ij} είναι **αυστηρά κάτω τριγωνικός** (δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στο «πάνω τρίγωνο» είναι μηδέν), τότε η μέθοδος είναι **άμεση**, δηλαδή η λύση του συστήματος για τα ενδιάμεσα στάδια $y^{n,i}$ απαιτεί μόνο αντικατάσταση.
- Αν είναι **κάτω τριγωνικός**, η μέθοδος είναι **ημιπεπλεγμένη**, δηλαδή η λύση του συστήματος για τα ενδιάμεσα στάδια απαιτεί τη διαδοχική λύση q (ενδεχομένως μη γραμμικών) εξισώσεων.
- Στη γενική περίπτωση έχουμε πεπλεγμένες μεθόδους, δηλ. απαιτείται η επίλυση q (ενδεχομένως μη γραμμικών) εξισώσεων.

Παραδείγματα μεθόδων Runge-Kutta

Άμεση μέθοδος του Euler: Είναι άμεση μέθοδος με $q = 1$ στάδιο και τάξη ακρίβειας $p = 1$. Το μητρώο της είναι:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: Είναι πεπλεγμένη μέθοδος με $q = 1$ στάδιο και τάξη ακρίβειας $p = 1$. Το μητρώο της είναι:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Μέθοδος του τραπεζίου: Είναι ημιπεπλεγμένη μέθοδος με $q = 2$ στάδια και τάξη ακρίβειας $p = 2$. Το μητρώο της είναι:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

Βελτιωμένη μέθοδος Euler ή άμεση μέθοδος του μέσου

Είναι άμεση μέθοδος με $q = 2$ στάδια και τάξη ακρίβειας $p = 2$. Το μητρώο της είναι:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

Η κλασσική μέθοδος των Runge-Kutta

Μια από τις δημοφιλέστερες μεθόδους RK είναι η λεγόμενη κλασσική μέθοδος των Runge-Kutta με μητρώο:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} t^{n,1} &= t^n, \\ t^{n,2} &= t^n + \frac{h}{2}, \\ t^{n,3} &= t^n + \frac{h}{2}, \\ t^{n,4} &= t^n + h = t^{n+1}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y^{n,1} &= y^n, \\ y^{n,2} &= y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n), \\ y^{n,3} &= y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) = y^n + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2}), \\ y^{n,4} &= y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,3}). \end{aligned}$$

Άρα η επόμενη προσέγγιση υπολογίζεται από τον τύπο

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6} \left(f(t^{n,1}, y^{n,1}) + 2f(t^{n,2}, y^{n,2}) + 2f(t^{n,3}, y^{n,3}) + f(t^{n,4}, y^{n,4}) \right)$$
$$\Leftrightarrow y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6} \left(f(t^n, y^n) + 2f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2}\right) + 2f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,3}\right) + f(t^{n+1}, y^{n,4}) \right).$$

Η μέθοδος αυτή γράφεται συνήθως συντομότερα ως εξής:

Θέτουμε $k_1 = f(t^n, y^n)$, $k_2 = f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2})$, $k_3 = f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,3})$, και $k_4 = f(t^{n+1}, y^{n,4})$. Τότε:

Η κλασσική μέθοδος των Runge-Kutta (RK4)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t^n, y^n) \\ k_2 &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(t^n + h, y^n + h k_3) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \tag{20}$$

Ψευδοκώδικας (4 υπολογισμοί της f ανά βήμα)

Είσοδος: a, b, y_0, N

Εξωτερική συνάρτηση f

$h \leftarrow (b - a)/N$

$t \leftarrow a$

$y \leftarrow y_0$

for $k = 1, \dots, N$ **do**

$k_1 \leftarrow f(t, y)$

$k_2 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1)$

$k_3 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2)$

$k_4 \leftarrow f(t + h, y + h k_3)$

$y \leftarrow y + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$t \leftarrow t + h$

end for

Παράδειγμα

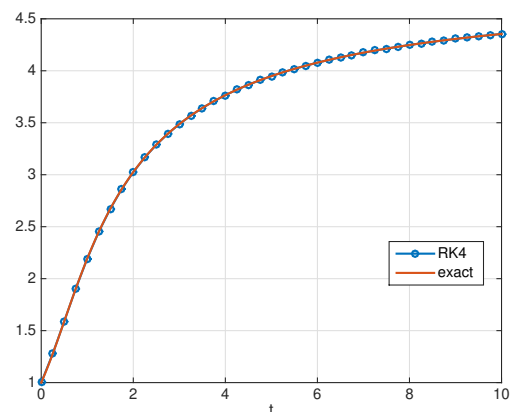
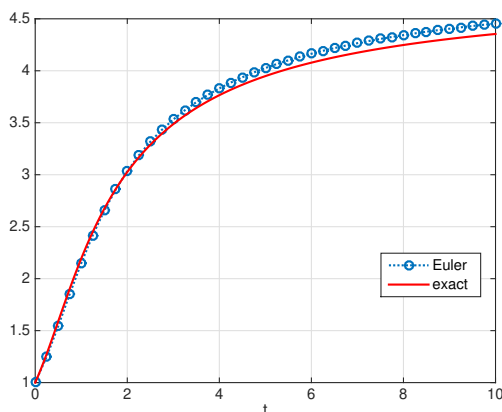
Θεωρήστε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y}{1+t^2}, & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αυτού είναι $y(t) = e^{\arctan t}$.

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, 10]$ σε N υποδιαστήματα, άρα το βήμα είναι $h = 10/N$.

Άμεση μέθοδος του Euler (αριστερά) και κλασσική μέθοδος των Runge-Kutta (RK4) (δεξιά), για $N = 40$.



Τιμές του σφάλματος

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n|$$

για τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του N .

N	Euler	RK4
10	$3.3384 \cdot 10^{-1}$	$1.9941 \cdot 10^{-2}$
20	$1.8507 \cdot 10^{-1}$	$1.0614 \cdot 10^{-3}$
40	$1.0054 \cdot 10^{-1}$	$6.5959 \cdot 10^{-5}$
80	$5.2790 \cdot 10^{-2}$	$4.0108 \cdot 10^{-6}$
160	$2.7111 \cdot 10^{-2}$	$2.4500 \cdot 10^{-7}$
320	$1.3748 \cdot 10^{-2}$	$1.5100 \cdot 10^{-8}$

Παρατηρούμε ότι όταν υποδιαπλασιάζουμε το βήμα (δηλαδή διπλασιάζουμε το N), τότε το σφάλμα της μεθόδου του Euler περίπου υποδιπλασιάζεται, ενώ το σφάλμα της RK4 δείχνει να υποδεκαεξαπλασιάζεται. Αυτό είναι απολύτως αναμενόμενο, αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η πρώτη είναι μια μέθοδος τάξης 1, ενώ η δεύτερη τάξης 4.

Παρατηρήστε ότι το σφάλμα της RK4 με $N = 10$ βήματα είναι μικρότερο από αυτό της Euler με $N = 160$ βήματα.

Από την άλλη μεριά, στα 160 βήματα της Euler χρειαζόμαστε 160 υπολογισμούς τιμών της $f(t, y)$ (έναν ανά βήμα), ενώ στα 10 βήματα της RK4 απαιτούνται 40 υπολογισμοί της f .

(Θυμηθείτε ότι ως κόστος ανά βήμα μετράμε μόνο το πλήθος των υπολογισμών της f , μιας και αυτό είναι το πιο δαπανηρό μέρος του υπολογισμού.)

Άρα, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, ενώ αρχικά βλέποντας το σφάλμα θα έλεγε κανείς ότι η RK4 είναι 16 φορές πιο αποτελεσματική από την Euler, αν συνυπολογίσουμε και το κόστος, είναι πιο ρεαλιστικό να πούμε ότι η RK4 είναι 4 φορές πιο αποτελεσματική από την Euler.

Αυτόματη μεταβολή βήματος

- Μέχρι στιγμής είδαμε μεθόδους στις οποίες (εφ' όσον γνωρίζουμε την τάξη ακρίβειάς τους) μπορούμε να προβλέψουμε τη βελτίωση που επιφέρουμε στο σφάλμα καθώς μικραίνουμε το βήμα h .
- Καμία όμως από τις μεθόδους αυτές **δεν επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει ένα κατάλληλο βήμα h ώστε να λύσει ένα Π.Α.Τ. με μια προεπιλεγμένη ακρίβεια ε και με το λιγότερο δυνατό κόστος.**
- Π.χ., αν έχουμε μια μέθοδο τάξης $O(h^4)$ και μικρύνουμε το βήμα από h σε $h/2$, τότε το σφάλμα θα μικρύνει περίπου κατά 16 φορές, αλλά αυτό δεν εξασφαλίζει ότι κανένα από τα δύο αυτά βήματα οδηγεί σε σφάλμα μικρότερο από, π.χ., $\varepsilon = 10^{-3}$.
- Μια «καλή» επιλογή βήματος θα πρέπει βεβαίως να λαμβάνει υπόψιν τη συμπεριφορά της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος και θα πρέπει να **ελέγχεται** και πιθανώς να **μεταβάλλεται** κατά τη διάρκεια της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος.

Ένας πρακτικός τρόπος με χρήση άμεσων μεθόδων

Οποιαδήποτε (μονοβηματική) άμεση μέθοδος για την επίλυση του Π.Α.Τ., με **μεταβλητό βήμα** $h_n = t^{n+1} - t^n$, μπορεί να γραφεί συνοπτικά στη μορφή:

$$y^{n+1} = y^n + h_n \Phi(t^n, y^n, h_n), \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1,$$

για κάποια συνάρτηση Φ .

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μεθόδους επίλυσης, μια RK με **τάξη ακρίβειας p** ,

$$y^{n+1} = y^n + h_n \Phi(t^n, y^n, h_n), \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1,$$

και μια μεγαλύτερης τάξης, στην πράξη συνήθως **τάξης $p+1$** ,

$$\tilde{y}^{n+1} = y^n + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y^n, h_n), \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Για τα **τοπικά σφάλματα** αυτών των μεθόδων έχουμε

$$\begin{aligned} \delta^n &= [y(t^n) + h_n \Phi(t^n, y(t^n), h_n)] - y(t^{n+1}) = O(h_n^{p+1}) \\ \tilde{\delta}^n &= [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)] - y(t^{n+1}) = O(h_n^{p+2}). \end{aligned}$$

Άρα το τοπικό σφάλμα της μεθόδου τάξης p είναι ίσο με

$$\delta^n = [y(t^n) + h_n \Phi(t^n, y(t^n), h_n)] - [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)] + O(h_n^{p+2}),$$

δηλαδή προσεγγίζεται πολύ καλά από τη διαφορά

$$[y(t^n) + h_n \Phi(t^n, y(t^n), h_n)] - [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)].$$

Τώρα, έστω ότι έχουμε προσδιορίσει τα βήματα h_i μέχρι το σημείο t^n , και έχουμε υπολογίσει τις προσεγγίσεις $y^0, \dots, y^n$ με τη μέθοδο τάξης p .

Θέτουμε αρχικά $h_n = h_{n-1}$, και **υπολογίζουμε** τις προσεγγίσεις:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h_n \Phi(t^n, y^n, h_n) \\ \tilde{y}^{n+1} = y^n + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y^n, h_n) \end{cases}$$

Δεχόμαστε ότι η διαφορά

$$y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1},$$

που μόλις υπολογίσαμε είναι μια καλή προσέγγιση της διαφοράς:

$$[y(t^n) + h_n \Phi(t^n, y(t^n), h_n)] - [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)],$$

που όπως είδαμε είναι μια καλή εκτίμηση του τοπικού σφάλματος δ^n .

Στη συνέχεια, για να προσδιορίσουμε το επόμενο βήμα h_n :

συγκρίνουμε, π.χ., την $|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}|$ με το γινόμενο εh_n ,

όπου ε είναι η προκαθορισμένη απαιτούμενη ακρίβεια. («έλεγχος του τοπικού σφάλματος ανά βήμα»).

Συγκεκριμένα,

- Αν $|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}| \leq \varepsilon h_n$, τότε αποδεχόμαστε το βήμα h_n , και συνεχίζουμε έχοντας αποδεχθεί την τιμή y^{n+1} ως προσέγγιση της $y(t^{n+1})$.
(Αν η διαφορά $|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}|$ προκύψει πολύ μικρότερη από το εh_n θεωρούμε ότι το βήμα είναι μικρότερο απ' ό,τι χρειαζόμαστε, το μεγαλώνουμε, υπολογίζουμε ξανά τα y^{n+1} , $\tilde{y}^{n+1}$ και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο.
- Αν $|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}| > \varepsilon h_n$, τότε θεωρούμε ότι το τοπικό σφάλμα είναι μεγάλο οπότε μικραίνουμε το βήμα (π.χ. στο μισό) και υπολογίζουμε ξανά τα y^{n+1} , $\tilde{y}^{n+1}$, με την καινούργια τιμή του h_n .

Παρατηρήσεις

Για να είναι αυτή η διαδικασία **αποτελεσματική** θα πρέπει βεβαίως η **αυτόματη επιλογή βήματος να είναι πολύ οικονομικότερη** από τον υπολογισμό του y^{n+1} για ένα εξαρχής πολύ μικρό βήμα h .

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει, π.χ., το πρόσθετο κόστος για τον υπολογισμό του $\tilde{y}^{n+1}$ να είναι μικρό σε σχέση με τον υπολογισμό του y^{n+1} .

Αυτό επιτυγχάνεται στην πράξη αν κατασκευάσουμε ζεύγη μεθόδων RK **με τα ίδια ενδιάμεσα στάδια**, αλλά **με διαφορετικά διανύσματα** (b_i), ($\tilde{b}_i$).

Στην περίπτωση αυτή το μητρώο των μεθόδων θα είναι της μορφής:

0			0	τ_1
a_{21}	0			τ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
a_{q1}	$\dots$	$\dots$	0	τ_q
b_1	b_2	$\dots$	b_q	
$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	$\dots$	$\tilde{b}_q$	

και λέμε ότι **η μέθοδος τάξης p** (που αντιστοιχεί στα b_i) **εμφυτεύεται στη μέθοδο τάξης $p+1$** (που αντιστοιχεί στα $\tilde{b}_i$).

Επίλυση Π.Α.Τ. στο MATLAB

Το MATLAB παρέχει ένα μεγάλο πλήθος αλγορίθμων για την επίλυση Π.Α.Τ.

Η δημοφιλέστερη μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι η **ode45**.

Η ode45 (Dormand και Prince) είναι μια μέθοδος μεταβλητού βήματος και υλοποιεί ένα ζεύγος μεθόδων RK με $q = 7$ στάδια και τάξεις 4 και 5.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y}{1+t^2}, & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

του οποίου η ακριβής λύση είναι $y(t) = e^{\arctan t}$.

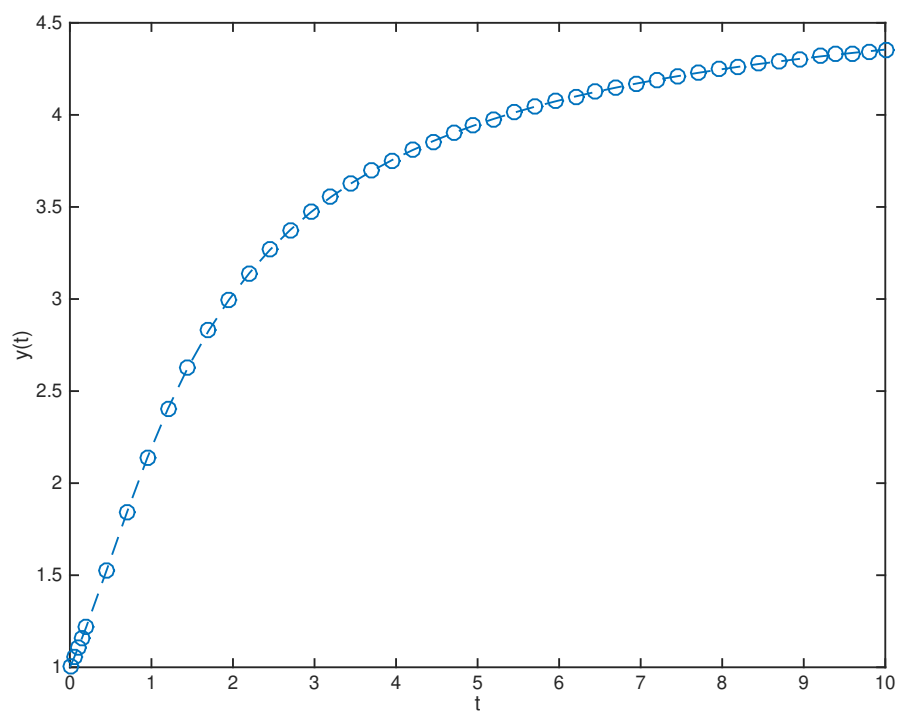
Αρχικά, δημιουργούμε το αρχείο `myf.m` για τον υπολογισμό τιμών της συνάρτησης $f(t, y) = \frac{y}{1+t^2}$:

`myf.m`

```
function f = myf(t,y)
%
% Function myf
% Inputs: t, y
% Output: The value f(t,y)
%
f = y./(1 + t.^2);
```

Στη συνέχεια, πληκτρολογούμε στη γραμμή εντολών:

```
>> tspan = [0,10];  
>> yzero = 1;  
>> [t,y] = ode45(@myf,tspan,yzero);  
>> plot(t,y),'o--','MarkerSize',8);  
>> xlabel('t')  
>> ylabel('y(t)')
```



Αν δεν μας ενδιαφέρουν τα διανύσματα t και y που επιστρέφει η `rk4`, μπορούμε απλώς να γράψουμε στη γραμμή εντολών:

```
>> ode45(@myf, tspan, yzero);
```

και το MATLAB θα σχεδιάσει τη λύση ενώ λύνει το Π.Α.Τ., οπότε θα δούμε και πάλι την ίδια γραφική παράσταση.

Δεδομένου ότι σε αυτό το παράδειγμα γνωρίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος μπορούμε με την ακόλουθη εντολή να υπολογίσουμε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της λύσης με την `ode45`.

```
>> max(abs(y - exp(atan(t))))  
ans =  
    4.8982e-04
```

Παράμετροι της `ode45`

Η συνάρτηση `ode45` επιτρέπει στον χρήστη να μεταβάλλει κάποιες παραμέτρους του αλγορίθμου μέσω ενός τέταρτου (προαιρετικού) ορίσματος που λέγεται `options` και συντάσσεται ως εξής:

```
options = odeset('name1', value1, 'name2', value2, ...);
```

```
ode45(@myf, tspan, yzero, options);
```

Τότε η συνάρτηση `odeset` αναθέτει στις παραμέτρους `name1`, `name2`, ..., τις τιμές `value1`, `value2`, ..., αντίστοιχα. Κάποιες χρήσιμες παράμετροι είναι οι ακόλουθες:

- **RelTol**. Είναι θετική σταθερά που καθορίζει το σχετικό μέγιστο σφάλμα, και έχει προκαθορισμένη τιμή $1.0e-3$. Η `ode45` προσπαθεί να επιλέξει το βήμα έτσι ώστε σε κάθε βήμα το σφάλμα $e(i)$ να ικανοποιεί
$$e(i) \leq \max(\text{RelTol} * \text{abs}(y(i)), \text{AbsTol}(i))$$
Η προκαθορισμένη τιμή $1.0e-3$, αντιστοιχεί χονδρικά σε ακρίβεια 0.1%.
- **AbsTol**. Είναι θετική σταθερά (ή διάνυσμα) με προκαθορισμένη τιμή $1.0e-6$.
- **InitialStep**. Προτεινόμενο αρχικό βήμα.

- **MaxStep**. Μέγιστο επιτρεπτό βήμα. Αν ο χρήστης δεν αλλάξει την τιμή του, τότε ορίζεται ως το $1/10$ του μήκους του διαστήματος ολοκλήρωσης.
- **Stats**. Η προκαθορισμένη τιμή είναι 'off'. Αν την αλλάξουμε σε 'on', τότε με την ολοκλήρωση της επίλυσης δίνονται πληροφορίες για τον αριθμό των βημάτων που εκτελέστηκαν επιτυχώς, για το πλήθος των «αποτυχημένων προσπαθειών», και για το πόσοι υπολογισμοί της συνάρτησης $f(t, y)$ απαιτήθηκαν.

Για τον πλήρη κατάλογο των παραμέτρων της `odeset` ανατρέξτε στο εγχειρίδιο χρήσης του MATLAB ή γράψτε `help odeset` στη γραμμή εντολών.

Άκαμπτα προβλήματα

Ο χαρακτηρισμός ενός προβλήματος ως άκαμπτου είναι μια εν γένει λεπτή, δύσκολη και ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία για την αριθμητική επίλυση μιας ΣΔΕ.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι εξαρτάται από τη διαφορική εξίσωση, τις αρχικές συνθήκες, αλλά και την αριθμητική μέθοδο.

Κάπως γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών είναι **άκαμπτο** αν η λύση που αναζητούμε μεταβάλλεται σχετικά αργά, αλλά υπάρχουν άλλες «κοντινές» λύσεις που μεταβάλλονται πολύ γρήγορα έτσι ώστε να αναγκαζόμαστε να παίρνουμε πολύ μικρό βήμα στην αριθμητική μας μέθοδο, για να μπορέσουμε να επιτύχουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις.

Θεωρήστε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = y^2 - y^3, & 0 \leq t \leq 2/\delta, \\ y(0) = \delta. \end{cases} \quad (22)$$

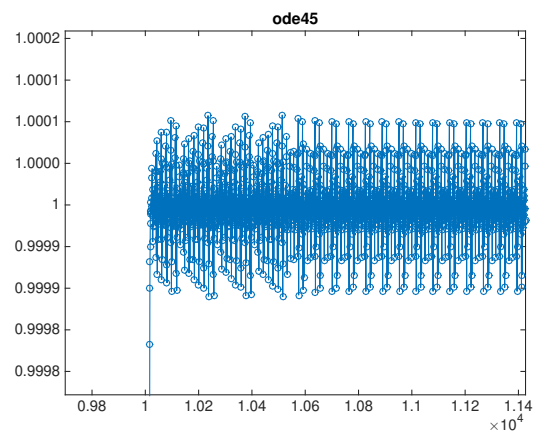
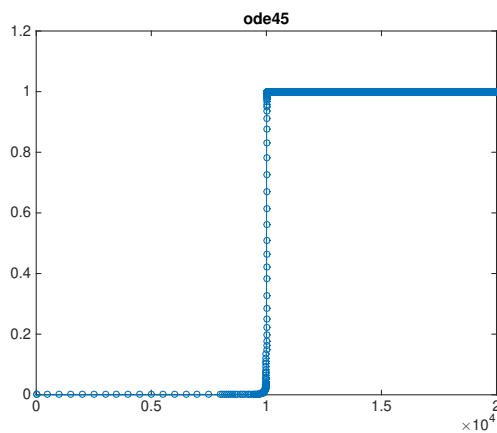
Αυτό το Π.Α.Τ. περιγράφει ένα πρόβλημα ανάφλεξης, όπου όταν ανάβουμε ένα σπίρτο η ακτίνα της «πύρινης μπάλας» μεγαλώνει μέχρις ότου φτάσει σε κάποια κρίσιμη τιμή και μετά παραμένει περίπου σταθερή.

Η $y(t)$ περιγράφει την ακτίνα αυτή, κατά τη χρονική στιγμή t , και δ είναι η αρχική ακτίνα που θεωρείται μικρή.

Ξεκινάμε λύνοντας το πρόβλημα αυτό με τη συνάρτηση ode45 για μια μικρή τιμή της παραμέτρου δ , π.χ. για $\delta = 10^{-4}$. Για να το πετύχουμε αυτό γράφουμε στο MATLAB τις ακόλουθες εντολές:

```
>> delta = 0.0001;  
>> tspan = [0 , 2/delta];  
>> F = @(t,y) y.^2 - y.^3;  
>> options = odeset('RelTol',1.e-4,'Stats','on');  
>> ode45(F, tspan, delta, options);
```

```
3040 successful steps  
323 failed attempts  
20179 function evaluations
```



Παρατηρήσεις

Βλέπουμε ότι η ode45 «επιτελεί την αποστολή της» μιας και καταφέρνει να κρατήσει τη λύση στο διάστημα 1 ± 10^{-4} , αλλά καταβάλλει πολύ μεγάλη προσπάθεια για να το πετύχει.

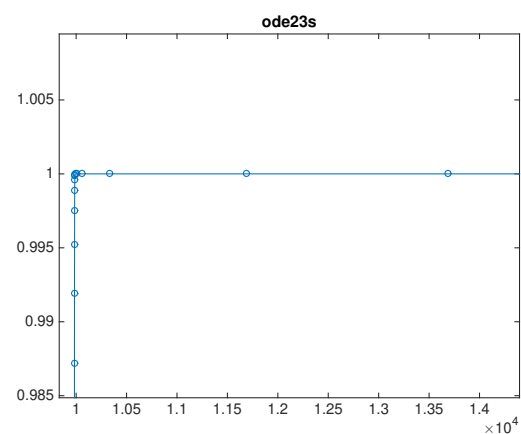
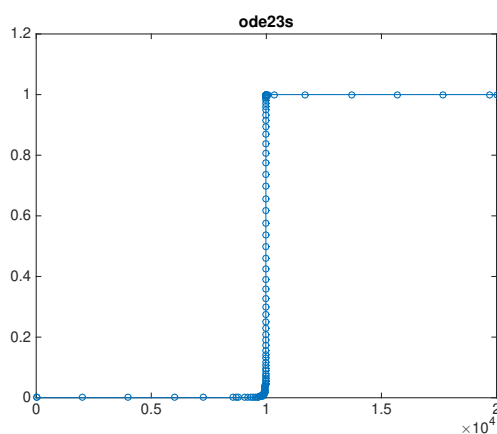
Η συμπεριφορά της ode45 είναι τυπική του τι συμβαίνει όταν επιχειρούμε να λύσουμε ένα άκαμπτο πρόβλημα με μια μέθοδο μεταβλητού βήματος που δεν είναι σχεδιασμένη ώστε να λαμβάνει υπόψιν την «ακαμψία»: Η μέθοδος υπολογίζει μια προσέγγιση της λύσης που είναι ακριβής, αλλά η συμπεριφορά της δεν είναι «ομαλή» και σίγουρα δεν είναι τόσο αποτελεσματική όσο μια μέθοδος που έχει σχεδιαστεί για να επιλύει άκαμπτα συστήματα.

H ode23s

Μια μέθοδος κατάλληλη για την επίλυση (μετρίως) άκαμπτων προβλημάτων, υλοποιείται στο MATLAB με τη συνάρτηση `ode23s`. Η `ode23s` είναι μια μονοβηματική, άμεση μέθοδος μεταβλητού βήματος που υλοποιεί ένα ζεύγος μεθόδων RK με τάξεις 2 και 3 και οφείλεται στους Bogacki και Shampine. Για να την καλέσουμε γράφουμε στη γραμμή εντολών:

```
>> ode23s(F, tspan, delta, options);
```

```
99 successful steps  
7 failed attempts  
412 function evaluations  
99 partial derivatives  
106 LU decompositions  
318 solutions of linear systems
```



Αριθμητικές μέθοδοι για συστήματα Δ.Ε.

Γενικά, ένα Π.Α.Τ. για ένα σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης γράφεται στη μορφή:

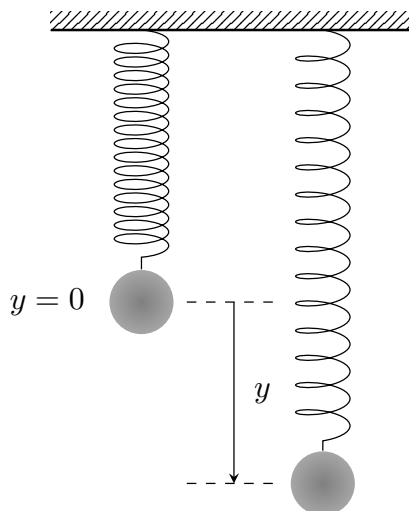
$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \in [a, b], \quad (23)$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{u}, \quad (24)$$

όπου $\mathbf{y}$ είναι ένα διάνυσμα με συνιστώσες τις (άγνωστες) συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ είναι επίσης ένα διάνυσμα με συνιστώσες $f_1(t, \mathbf{y}), \dots, f_n(t, \mathbf{y})$, όπου καθεμία από τις f_i είναι, εν γένει, μια μη γραμμική συνάρτηση όλων των συνιστωσών του διανύσματος $\mathbf{y}$, και $\mathbf{u}$ είναι ένα γνωστό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αυτό όλες οι μέθοδοι που είδαμε μέχρι τώρα εξακολουθούν να εφαρμόζονται πρακτικά απaráλλακτες.

Παράδειγμα: σύστημα μάζας-ελατηρίου



Μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος μάζας-ελατηρίου

Τραβάμε τη μπάλα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $y > 0$. Αυτό προκαλεί στο ελατήριο μια δύναμη, που είναι **ανάλογη της μετατόπισης y** ,

$$F_1 = -ky, \quad (\text{Νόμος του Hooke}) \quad (25)$$

όπου k σταθερά ελατηρίου.

Η κίνηση του συστήματος μάζα-ελατήριο καθορίζεται από το **δεύτερο νόμο του Νεύτωνα** σύμφωνα με τον οποίο

$$\text{Μάζα} \times \text{Επιτάχυνση} = my'' = \text{Δύναμη}, \quad (26)$$

όπου ως «Δύναμη» εννοούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη μπάλα.

Αν αγνοήσουμε την απόσβεση, τότε από το νόμο του Νεύτωνα (26) καταλήγουμε στη ΔΕ:

$$my'' = F_1 = -ky$$

Μαθηματική μοντελοποίηση ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου

Γραμμική ομογενής ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$my'' + ky = 0 \Leftrightarrow y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad \text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (27)$$

Γενική λύση:

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (28)$$

Η κίνηση αυτή λέγεται **αρμονική ταλάντωση** και έχει **συχνότητα $f = \omega_0/(2\pi)$ Hz** διότι το συνημίτονο και το ημίτονο που εμφανίζονται στην (28) έχουν περίοδο $2\pi/\omega_0$. Η συχνότητα αυτή αποκαλείται **φυσική συχνότητα** του συστήματος.

Τη σχέση (28) μπορούμε εναλλακτικά να τη γράψουμε στη μορφή

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta), \quad (29)$$

όπου $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ και γωνίας φάσης δ , με $\tan \delta = B/A$, η οποία αναδεικνύει τα φυσικά χαρακτηριστικά του πλάτους και της φάσης της μετατόπισης της (28).

(Η (29) προκύπτει από την (28) αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, καθώς και τη σχέση $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.)

Διατύπωση του προβλήματος σε μορφή συστήματος Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης

Θα μετατρέψουμε τη Δ.Ε. δεύτερης τάξης σ' ένα σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης. Καταρχήν, κάνουμε την ακόλουθη αντικατάσταση εισάγοντας τις καινούριες συναρτήσεις:

$$y_1 = y, \quad (30)$$

$$y_2 = y'. \quad (31)$$

Τώρα, η y_1 συμβολίζει τη μετατόπιση και η y_2 την ταχύτητα. Παραγωγίζουμε τις (30), (31), και έχουμε

$$y_1 = y \Rightarrow y_1' = y' \stackrel{(31)}{=} y_2,$$

$$y_2 = y' \Rightarrow y_2' = y'' \stackrel{(27)}{=} -\omega_0^2 y \stackrel{(30)}{=} -\omega_0^2 y_1.$$

Έτσι καταφέραμε να γράψουμε τη Δ.Ε. (27) σε μορφή συστήματος δύο Δ.Ε. πρώτης τάξης,

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\omega_0^2 y_1. \end{cases} \quad (32)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε το σύστημα (32) στη διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad (33)$$

όπου

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega_0^2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, το σύστημα (33) μπορούμε να το γράψουμε και στην ακόλουθη μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y}' = A \mathbf{y}, \quad (34)$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμογή

Έστω $[a, b] = [0, 4\pi]$, αρχική μετατόπιση: $y_1(0) = 1$, αρχική ταχύτητα: $y_2(0) = 0$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η μάζα $m = 1$ kg και ότι η σταθερά του ελατηρίου $k = 1$ N/m (επομένως $\omega_0^2 = 1$). Τότε καταλήγουμε στο ακόλουθο Π.Α.Τ.

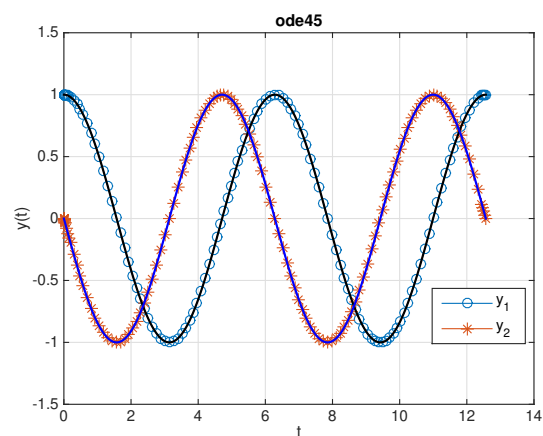
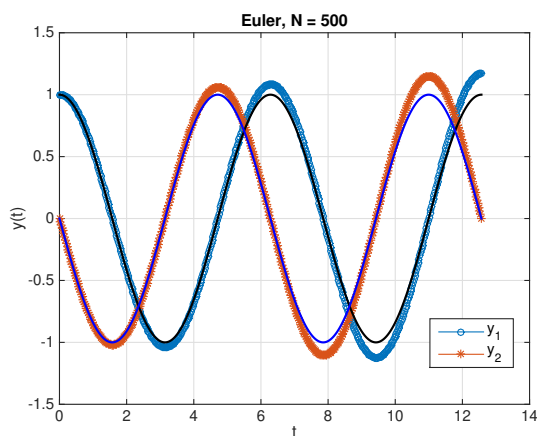
$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \in [0, 4\pi], \quad (35)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}, \quad (36)$$

όπου

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ακριβής λύση: $(y_1(t), y_2(t))^T = (\cos t, -\sin t)^T$.



Παράδειγμα χρήσης της ode45

odesystem.m

```
a = 0; b = 4*pi;
tspan = [a,b];
incond = [1,0]';
options = odeset('RelTol',1.e-4,'Stats','on');
[t,y] = ode45(@(t,y) odefcn(t,y), tspan, incond, options);
%
plot(t, y(:,1), 'o-', t, y(:,2), '*-', 'MarkerSize', 9);
axis([0 14 -1.5 1.5]);
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
grid on;
%
hold;
%
exact = @(t) [cos(t) ; -sin(t)];
tfine = linspace(a, b, 1001);
exsol = exact(tfine);
%
plot(tfine, exsol(1,:), 'k', tfine, exsol(2,:), 'b')
```

Στο αρχείο `odefcn.m` ορίζεται η συνάρτηση $f(t, \mathbf{y})$ η οποία αποτελεί ένα από τα ορίσματα της `ode45`.

odefcn.m

```
function dydt = odefcn(t,y)
dydt = [0 1; -1 0] * y;
end
```

Παρατηρούμε ότι για την `ode45` απαιτούνται 31 βήματα και 199 υπολογισμοί της συνάρτησης, ενώ η Euler με $N = 500$ κάνει 500 υπολογισμούς της συνάρτησης και δίνει σαφώς χειρότερα αποτελέσματα.