

Παρεμβολή και Αριθμητική Ολοκλήρωση

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Δημήτρης Μητσούδης

Το πρόβλημα της παρεμβολής

Έστω ότι μας δίνονται οι τιμές μιας (πραγματικής) ανεξάρτητης μεταβλητής $x_0, x_1, \dots, x_n$, και οι τιμές $y_0, y_1, \dots, y_n$ της αντίστοιχης εξαρτημένης μεταβλητής. Υποθέτουμε ότι

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n,$$

και ότι κάθε y_i είναι ένας πραγματικός αριθμός που αντιστοιχεί στο x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Π.χ. τα y_i μπορεί να είναι αποτελέσματα μετρήσεων ή να δίνονται από κάποιο μαθηματικό τύπο (π.χ. $y_i = f(x_i)$).

Το απλούστερο πρόβλημα της παρεμβολής: Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε

$$\phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

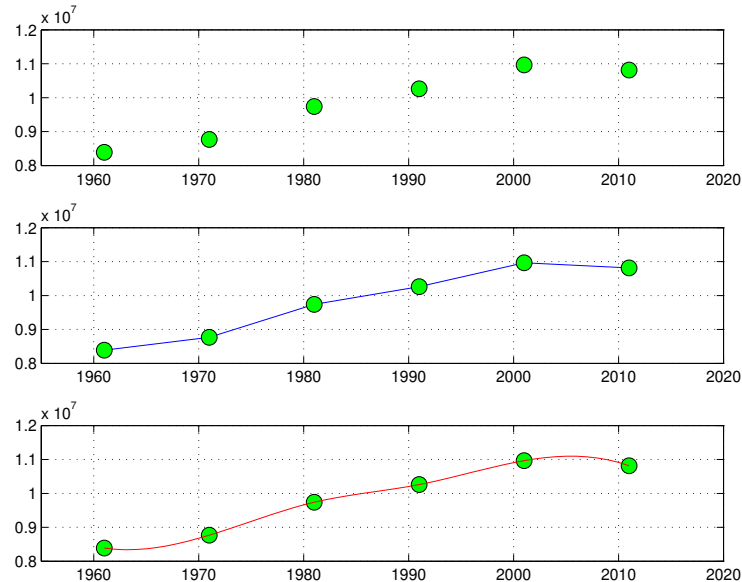
και η $\phi(x)$ να παίρνει “**λογικές**” τιμές για κάθε x που βρίσκεται μεταξύ των x_i .

Το κριτήριο για το τι είναι λογικό μπορεί να μεταβάλλεται από πρόβλημα σε πρόβλημα και πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να κατανοηθεί σε ικανοποιητικό βαθμό.

Παράδειγμα

Πληθυσμός της Ελλάδας βάσει στοιχείων απογραφών:

x_i	1961	1971	1981	1991	2001	2011
y_i	8 388 553	8 768 372	9 739 441	10 259 900	10 964 020	10 815 197



Παρεμβολή τύπου Lagrange

Δεδομένα: (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$.

(Τα y_i μπορεί να είναι τιμές κάποιας συνάρτησης, π.χ. $y_i = f(x_i)$.)

Παρεμβολή τύπου Lagrange: Θέλουμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση ϕ από ένα ορισμένο σύνολο συναρτήσεων, η οποία να προσδιορίζεται μόνο από τις τιμές y_i , και η οποία να **παρεμβάλλεται** στα σημεία (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, δηλαδή να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Για ιστορικούς και πρακτικούς λόγους η σημαντικότερη κλάση συναρτήσεων παρεμβολής είναι τα πολυώνυμα.

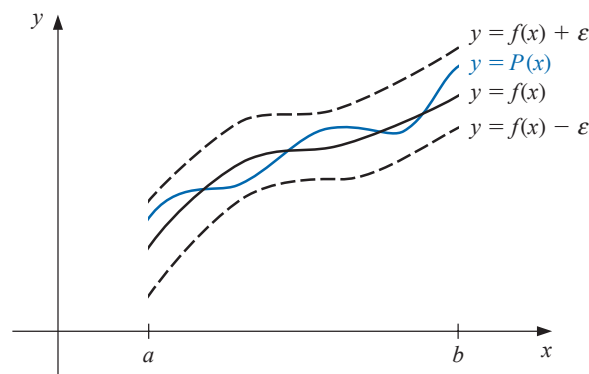
Πλεονεκτήματα πολυωνύμων ως συναρτήσεων παρεμβολής

- Οι τιμές των πολυωνύμων υπολογίζονται εύκολα με ένα πεπερασμένο πλήθος προσθαφαιρέσεων και πολλαπλασιασμών.
- Παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα.
- Έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.

Θεώρημα (Weierstrass)

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p_n(x)$, βαθμού το πολύ n , τέτοιο ώστε

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon.$$



Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n+1$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n τέτοιο ώστε

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Παράδειγμα: Το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού 1, που παρεμβάλλεται στις τιμές μιας συνάρτησης f στα σημεία a, b , δηλαδή διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, είναι το

$$p_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Πράγματι, το p_1 είναι πρώτου βαθμού, και

$$p_1(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) = 0 + f(a) = f(a).$$

$$p_1(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) = f(b) - f(a) + f(a) = f(b).$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Ονομάζουμε **πολυώνυμο Lagrange** τα πολυώνυμα $L_i(x)$, $i = 0, \dots, n$, βαθμού n , με την ιδιότητα

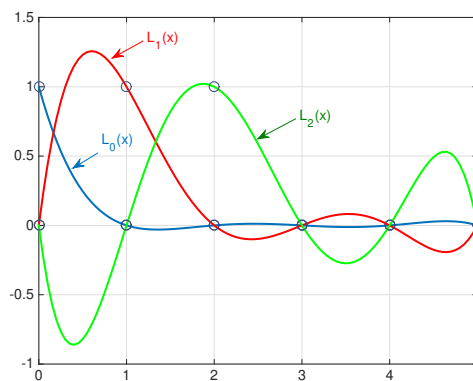
$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι τα πολυώνυμα

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

πληρούν τις συνθήκες (1).

Π.χ.



Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange

Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής p_n , βαθμού το πολύ n , που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \\ &= f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + \dots + f(x_n) L_n(x). \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο παρεμβολής p_2 (βαθμού το πολύ 2) που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = \frac{1}{x}$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$.

Αρχικά, υπολογίζουμε τα πολυώνυμα Lagrange

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2.5)(x - 4)}{(2 - 2.5)(2 - 4)} = x^2 - 6.5x + 10, \\L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2.5 - 2)(2.5 - 4)} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}, \\L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(4 - 2)(4 - 2.5)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

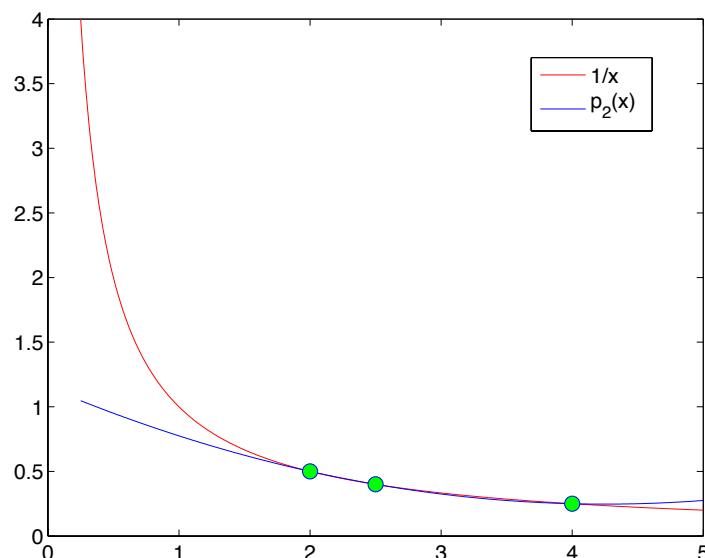
Άρα

$$\begin{aligned}p_2(x) &= \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\&= \frac{1}{2}(x^2 - 6.5x + 10) + \frac{2}{5}\left(-\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}\right) \\&= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

i	0	1	2
x_i	2	2.5	4
$f(x_i)$	1/2	2/5	1/4

$$p_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15.$$



Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

Θεωρούμε και πάλι $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε αν γράψουμε το πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n για το οποίο ισχύει $p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$, στη μορφή

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ διαδοχικά:

$$\begin{aligned} p(x_0) = y_0 &\rightarrow \alpha_0 = y_0 \\ p(x_1) = y_1 &\rightarrow \alpha_1 = \frac{y_1 - \alpha_0}{x_1 - x_0} \\ p(x_2) = y_2 &\rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{y_2 - \alpha_0}{x_2 - x_0} - \alpha_1 \right) / (x_2 - x_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο παρεμβολής p_2 (βαθμού το πολύ 2) που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = \frac{1}{x}$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$, κάνοντας χρήση της μορφής του Νεύτωνα.

Το πολυώνυμο θα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x - 2) + \alpha_2(x - 2)(x - 2.5). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} p(2) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2} \\ p(2.5) = \frac{2}{5} &\Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha_1(2.5 - 2) = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{5} \\ p(4) = \frac{1}{4} &\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(4 - 2) + \alpha_2(4 - 2)(4 - 2.5) = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή του Νεύτωνα είναι το:

$$p(x) = 0.5 - 0.2(x - 2) + 0.05(x - 2)(x - 2.5).$$

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους μέχρι και τάξης $n + 1$ ($n \geq 0$) στο $[a, b]$, και $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Αν p είναι το (μοναδικό) πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, τότε ισχύει:

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists \xi \in (a, b) : \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (2)$$

όπου συμβολίζουμε: $\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Επιπλέον,

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \quad (3)$$

Απόδειξη

Αν x είναι κάποιο από τα $x_0, x_1, \dots, x_n$, τότε η (2) ισχύει κατά προφανή τρόπο. Έστω $x \in [a, b]$ και $x \neq x_i$, για $i = 0, 1, \dots, n$.

Θέτουμε $\Phi(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i)$ και ορίζουμε:

$$\varphi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t).$$

Αφού η $f \in C^{n+1}[a, b]$ και η Φ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n + 1 \Rightarrow \varphi \in C^{n+1}[a, b]$. Επίσης

$$\varphi(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi(x_i)}_{=0} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

και

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(x) = 0.$$

Απόδειξη (...συνέχεια)

Άρα η φ έχει τουλάχιστον $n + 2$ ρίζες στο $[a, b]$

Θ .Rolle $\Rightarrow$ η φ' έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες στο (a, b)

Θ .Rolle $\Rightarrow$ η φ'' έχει τουλάχιστον n ρίζες στο (a, b)

$\vdots$

Θ .Rolle $\Rightarrow$ η $\varphi^{(n+1)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b) , έστω ξ .

Δηλ. $\exists \xi \in (a, b): \varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Προφανώς, $\Phi^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$, επομένως:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} (n + 1)!, \quad t \in [a, b].$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(\xi) = 0 &\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} (n + 1)! = 0 \\ &\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \Phi(x). \end{aligned}$$

Απόδειξη (...συνέχεια)

Φυσικά,

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n + 1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \\ \Rightarrow |f(x) - p(x)| &\leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n + 1)!}, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \\ \Rightarrow \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| &\leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n + 1)!}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το μέγιστο σφάλμα που θα έχουμε αν προσεγγίσουμε μια συνάρτηση f που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[a, b]$ με το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

Το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$ στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ είναι το:

$$p(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a). \quad (\text{γιατί;})$$

Άρα από την εκτίμηση (3) έχουμε ότι:

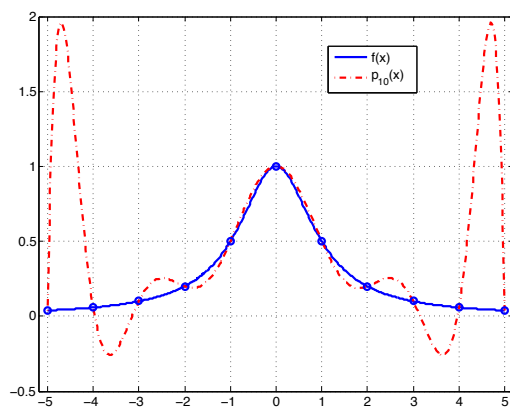
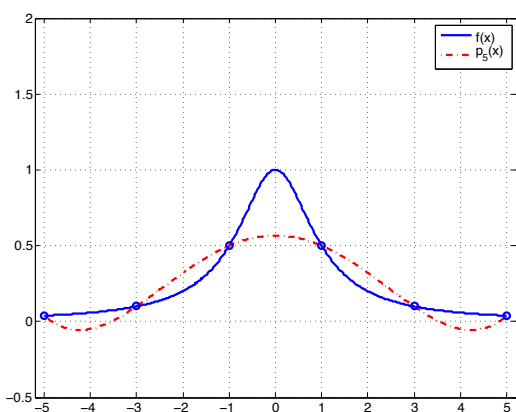
$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| &\leq \frac{1}{2!} \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |(x-a)(x-b)|}_{\frac{1}{4}(b-a)^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Μειονεκτήματα της πολυωνυμικής παρεμβολής

Όταν το πλήθος των σημείων είναι μεγάλο και, επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής **n είναι μεγάλος**, τότε η πολυωνυμική παρεμβολή παρουσιάζει τόσο θεωρητικά όσο και υπολογιστικά προβλήματα.

Π.χ., συνάρτηση Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$



Η συνάρτηση Runge και το πολυώνυμο παρεμβολής p_n σε $n+1$ ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$. Αριστερά: $n = 5$. Δεξιά: $n = 10$.

Μειονεκτήματα της πολυωνυμικής παρεμβολής

Η παρεμβολή με πολυώνυμα **μεγάλου βαθμού** σε **μεγάλο πλήθος σημείων παρεμβολής** είναι μια «**ριψοκίνδυνη**» διαδικασία.

Η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ κακή εκτός εάν επιλέξουμε τα σημεία παρεμβολής με πολύ μεγάλη προσοχή.

Ακόμη όμως και αν το σφάλμα ήταν μικρό για μεγάλο n , θα είχαμε προβλήματα στον υπολογισμό των τιμών ενός πολυωνύμου μεγάλου βαθμού λόγω των σφαλμάτων στρογγύλευσης στον υπολογιστή.

Σκεφτείτε ότι αν, π.χ., μας δίνουν **1000** σημεία θα έπρεπε κάθε φορά να υπολογίζουμε την τιμή ενός πολυωνύμου βαθμού **999** !!!

Σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε σε παρεμβολή με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις (splines).

Θα δούμε δύο περιπτώσεις: α) **τις γραμμικές splines**, και β) **τις κυβικές splines**.

Παρεμβολή με splines

Η ιστορία των **splines** ξεκινάει από πολύ παλιά, από την ανάγκη των σχεδιαστών που συχνά χρειαζόταν να σχεδιάζουν καμπύλες που να διέρχονται από συγκεκριμένα σημεία. Για να το πετύχουν αυτό χρησιμοποιούσαν μηχανικές splines, που ήταν εύκαμπτες ταινίες από ελαστικό υλικό, συνήθως ξύλο, τις οποίες σταθεροποιούσαν στα σημεία παρεμβολής με βάρη (που στα αγγλικά λέγονται ducks λόγω του σχήματός τους). (Η ορολογία αυτή χρονολογείται τουλάχιστον από το 1891.)



Η ελαστική φύση αυτών των ξύλινων ταινιών τους επέτρεπε να λυγίζουν λίγο ώστε να περνάνε από τα προδιαγεγραμμένα σημεία, παίρνοντας ένα σχήμα **που ελαχιστοποιούσε τη δυναμική ενέργεια**.

Παρεμβολή με splines

Θεωρούμε ένα διαμερισμό του διαστήματος $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Τα x_i λέγονται *κόμβοι* του διαμερισμού.

Splines ως προς το διαμερισμό αυτό λέγονται γενικά συναρτήσεις, οι οποίες σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή, είναι, π.χ., πολυώνυμα βαθμού το πολύ m , ή τριγωνομετρικά πολυώνυμα κ.ο.κ. Εμείς θα ασχοληθούμε με την ακόλουθη συγκεκριμένη περίπτωση:

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση s είναι μια **spline βαθμού k** αν:

- ❶ Οι $s, s', s'', \dots, s^{(k-1)}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.
- ❷ Η s είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$.

Ειδικότερα, θα περιγράψουμε τις γραμμικές (βαθμού 1) splines, και τις κυβικές (βαθμού 3) splines.

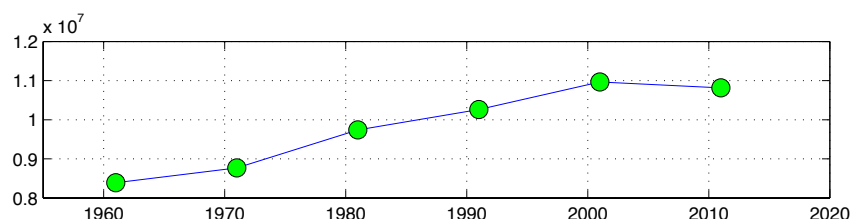
Γραμμικές splines

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, και $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.

Μια συνάρτηση $s(x)$ θα λέγεται **γραμμική spline** αν

- είναι συνεχής σε ολόκληρο το $[a, b]$, και
- είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Π.χ.



Κυβικές splines

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, και $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.

Μια συνάρτηση $s(x)$ θα λέγεται **κυβική spline** αν

- είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το $[a, b]$ (s, s', s'' συνεχείς στο $[a, b]$), και
- είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$.

Συμβολίζουμε το κυβικό πολυώνυμο του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, ως $s_i(x), i = 1, \dots, n$.
Π.χ., $s_i(x) = a_i(x - x_{i-1})^3 + b_i(x - x_{i-1})^2 + c_i(x - x_{i-1}) + d_i$.

Άρα σε καθένα από τα n υποδιαστήματα πρέπει να υπολογίσουμε 4 σταθερές, δηλ. συνολικά $4n$ σταθερές.

Κυβικές splines

- $s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. Παρεμβολικές συνθήκες. ($n + 1$)
- $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$. Συνέχεια της s στους εσωτερ. κόμβους. ($n - 1$)
- $s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$. Συνέχεια της s' στους εσωτ. κόμβους. ($n - 1$)
- $s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$. Συνέχεια της s'' στους εσωτ. κόμβους. ($n - 1$)

Άρα χρειαζόμαστε ακόμα 2 συνθήκες που είναι, συνήθως, διαφορών τύπων συνοριακές συνθήκες για την s στα άκρα $x_0 = a, x_n = b$. Π.χ.

- $s'(x_0) = f'(x_0), s'(x_n) = f'(x_n)$.
- $s''(x_0) = f''(x_0), s''(x_n) = f''(x_n)$.
- $s''(x_0) = 0, s''(x_n) = 0$. **Φυσική** κυβική spline.

Παράδειγμα

Είναι η συνάρτηση

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + x - 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 - x - 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

μια κυβική spline;

Λύση: Για να είναι η s κυβική spline θα πρέπει να είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 3 σε κάθε υποδιάστημα (**προφανές**) και, επιπλέον, οι s , s' και s'' πρέπει να είναι συνεχείς σε ολόκληρο το $[-1, 1]$.

Προφανώς οι s , s' και s'' είναι συνεχείς παντού εκτός (πιθανώς) από το σημείο $x = 0$, **άρα πρέπει να ελέγξουμε τι συμβαίνει στο $x = 0$.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x - 1) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x - 1) = -1$$

άρα η s είναι συνεχής στο $x = 0$.

Επίσης

$$s'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 3x^2 - 1 & , \quad 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} s'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 1) = 1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} s'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 1) = -1$$

και άρα **η s' δεν είναι συνεχής στο $x = 0$** , οπότε η s **δεν** είναι κυβική spline.

Πολυώνυμα στο MATLAB

```
>> p = [1 1 -6]           % Δίνουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου  $x^2 + x - 6$ 
p =
    1    1   -6
>> y = polyval(p,1)       % Υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου στο 1
y =
   -4
>> x = -2:2               % Ορίζουμε το διάνυσμα  $x = (-2, -1, 0, 1, 2)$ 
x =
   -2   -1    0    1    2
>> y = polyval(p,x)       % Υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου στο  $x$ 
y =
   -4   -6   -6   -4    0
>> z = roots(p)           % Βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου  $p$ 
z =
   -3
    2
>> polyval(p,z)           % Επαληθεύουμε ότι οι ρίζες του  $p$  είναι στο  $z$ 
ans =
    0
    0
```

Παρεμβολή στο MATLAB

Έστω, τώρα, ότι μας δίνονται m ζεύγη δεδομένων (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, όπου τα σημεία x_i είναι διαφορετικά ανά δύο.

Στο MATLAB η συνάρτηση `polyfit` (σύνταξη: `p = polyfit(x,y,n)`) κάνει προσαρμογή των δεδομένων σε μια καμπύλη, υπολογίζοντας (με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων) το πολυώνυμο βαθμού n που ελαχιστοποιεί την ποσότητα: $\sum_{i=1}^m (p(x_i) - y_i)^2$.

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την `polyfit` με $n = m - 1$, τότε μας επιστρέφει τους συντελεστές του (μοναδικού) πολυωνύμου βαθμού (το πολύ) $m - 1$, που παρεμβάλλεται στις τιμές y_i στα σημεία x_i , $i = 1, \dots, m$.

Παρεμβολή στο MATLAB

Π.χ. αν θέλουμε να υπολογίσουμε και να σχεδιάσουμε το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού 2, που παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x = 2, 2.5, 4$, γράφουμε τις εντολές:

```
>> x = [2 2.5 4]
x =
    2.0000    2.5000    4.0000
>> y = 1./x
y =
    0.5000    0.4000    0.2500
>> p = polyfit(x,y,2) % Υπολογισμός του πολ. παρεμβολής βαθμού 2
p =
    0.0500   -0.4250    1.1500
% Δημιουργία 41 ισαπεχόντων σημείων στο διάστημα [2, 4]
>> xx = linspace(2,4,41);
>> yy = 1./xx;
% Υπολογισμός των τιμών του πολ. παρεμβολής στα σημεία xx
>> z = polyval(p,xx);
>> plot(xx,yy,xx,z,'r',x,y,'k.','MarkerSize',20,'LineWidth',2)
>> grid on
>> legend('1/x','interpolant','interpolation points')
```

Splines στο MATLAB

Π.χ. για να υπολογίσετε την κυβική spline παρεμβολής στις τιμές της $f(x) = \sin x$ στα σημεία $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ με συνθήκες **not-a-knot** (που επιβάλλουν τη **συνέχεια και της τρίτης παραγώγου στον πρώτο εσωτερικό και στον τελευταίο εσωτερικό κόμβο**) γράφετε:

```
>> x = linspace(0,2*pi,5)
x =
    0    1.5708    3.1416    4.7124    6.2832
>> y = sin(x)
y =
    0    1.0000    0.0000   -1.0000   -0.0000
>> xx = linspace(0,2*pi,101);
>> yy = sin(xx);
>> z1 = spline(x,y,xx);
>> plot(x,y,'k.',xx,yy,xx,z1,'r','MarkerSize',20)
>> grid on
>> legend('interp. pts','sin(x)','cubic spline (not-a-knot)')
```

Splines στο MATLAB

Τέλος, για να υπολογίσουμε τη γραμμική spline παρεμβολής στις τιμές της $f(x) = \sin x$ στα σημεία $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `interp1` ως εξής:

```
>> x = linspace(0,2*pi,5)
x =
    0 1.5708 3.1416 4.7124 6.2832
>> y = sin(x)
y =
    0 1.0000 0.0000 -1.0000 -0.0000
>> xx = linspace(0,2*pi,101);
>> yy = sin(xx);
>> z3 = interp1(x,y,xx);
>> plot(x,y,'k.',xx,yy,xx,z3,'r','MarkerSize',20)
>> grid on
>> legend('interpolation points','sin(x)','linear spline')
```

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη και φραγμένη συνάρτηση. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Αν F είναι μια παράγουσα της f , τότε φυσικά

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Όμως, σπάνια μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά μια παράγουσα. Επιπλέον, ακόμα και αν γνωρίζουμε την F μπορεί μια εύκολα υπολογιζόμενη f να έχει πολύπλοκη παράγουσα F .

Π.χ., αν

$$f(x) = 1/(1 + x^4),$$

τότε μια παράγουσα της είναι η

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\arctan(1 + \sqrt{2}x) - \arctan(1 - \sqrt{2}x) \right).$$

Αριθμητική ολοκλήρωση

Στην αριθμητική ολοκλήρωση, το ολοκλήρωμα

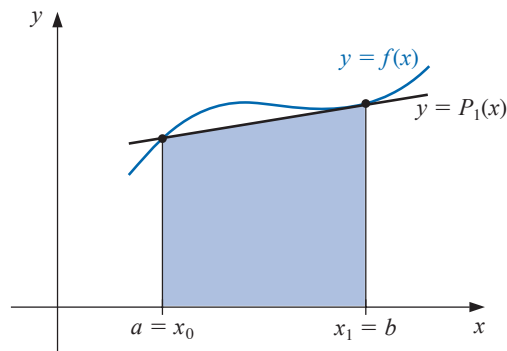
$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

προσεγγίζεται με τύπους ολοκλήρωσης της μορφής

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n).$$

- Τα x_i λέγονται **κόμβοι** και είναι σημεία στο διάστημα ολοκλήρωσης,
- τα w_i λέγονται **βάρη** και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ο τύπος του τραπεζίου



$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q_2(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Ο τύπος του τραπεζίου ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι πρώτου βαθμού.

Ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ με βήμα h ,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

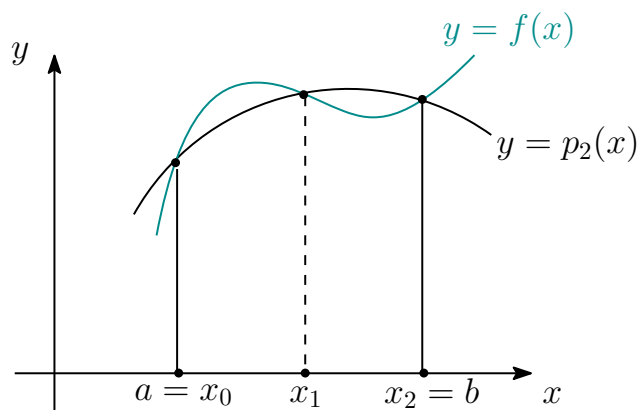
Εφαρμόζουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ τον τύπο του τραπεζίου, οπότε αθροίζοντας οδηγούμαστε στον **σύνθετο τύπο του τραπεζίου**

$$Q_{n+1}^T(f) = h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

Αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι αρκετά ομαλή, συγκεκριμένα, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, τότε μια **εκτίμηση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου** είναι η:

$$|I(f) - Q_{n+1}^T(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Ο τύπος του Simpson



$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q_3(f) = \frac{b-a}{2} \left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b) \right].$$

Ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι τρίτου βαθμού.

Ο σύνθετος τύπος του Simpson

Έστω n **άρτιος**. Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ με βήμα h ,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

Εφαρμόζουμε στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $\dots$, $[x_{n-2}, x_n]$ τον τύπο του Simpson, οπότε αθροίζοντας οδηγούμαστε στον **σύνθετο τύπο του Simpson**

$$Q_{n+1}^S(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right].$$

Για το σύνθετο τύπο του Simpson αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, τότε ισχύει η ακόλουθη **εκτίμηση σφάλματος**:

$$|I(f) - Q_{n+1}^S(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

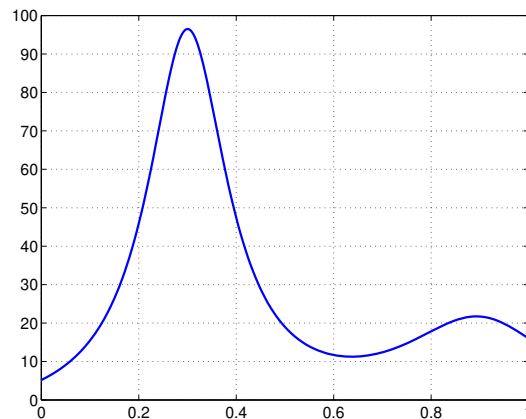
Αριθμητική ολοκλήρωση στο MATLAB

Θέλουμε να υπολογίσουμε το:

$$\int_0^1 h(x) dx, \quad \text{όπου } h(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6.$$

Η h υλοποιείται στο MATLAB με τη συνάρτηση `humps`. Για να δούμε τη γραφική της παράσταση γράφουμε:

```
>> fplot(@humps,[0,1])  
>> grid on
```



Αριθμητική ολοκλήρωση στο MATLAB

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της με την `quad` γράφουμε:

```
>> q = quad(@humps,0,1)  
q =  
    29.8583
```

Μπορούμε ακόμη να πάρουμε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος με τη συνάρτηση `trapz`, που υλοποιεί το σύνθετο τύπο του τραπεζίου. Στην `trapz` δίνουμε τους κόμβους x_i και τις τιμές της συνάρτησης $f(x_i)$. Π.χ.

```
>> x = 0:0.1:1;           % Ορίζουμε το διάνυσμα  $x = (0, 0.1, \dots, 0.9, 1)$   
>> y = humps(x);         % Υπολογίζουμε τις τιμές  $h(x)$   
>> q = trapz(x,y)  
q =  
    29.8517
```

Άσκηση 1

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2}x \cos x$. Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής $p_2(x)$, βαθμού ≤ 2 , που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$ και $x_2 = \pi/2$ του διαστήματος $[0, \pi/2]$.

Λύση (1ος τρόπος: πολυώνυμο Lagrange)

Το **μοναδικό πολυώνυμο βαθμού (μικρότερου ή ίσου του) 2**, που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα **τρία σημεία** $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, γράφεται με τη βοήθεια των πολυωνύμων Lagrange ως εξής:

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x), \quad (4)$$

Εδώ:

$$f(x_0) = f(0) = 0, \quad f(x_1) = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad f(x_2) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

και

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{(0 - \frac{\pi}{4})(0 - \frac{\pi}{2})} = \frac{8}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4} - 0)(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = -\frac{16}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{2} - 0)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \frac{8}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην (4) και έχουμε

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0 \cdot L_0(x) + \frac{\pi}{4} \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L_1(x) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[-\frac{16}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] = -\frac{4}{\pi} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{\pi} x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Λύση (2ος τρόπος: με τη μορφή του Νεύτωνα)

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1x + a_2x\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Πρέπει να βρούμε τα a_0, a_1, a_2 , αξιοποιώντας τις **παρεμβολικές συνθήκες**:

$$p_2(x_0) = f(x_0) = 0, \quad p_2(x_1) = f(x_1) = \frac{\pi}{4}, \quad p_2(x_2) = f(x_2) = 0.$$

Άρα

$$p_2(0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0.$$

$$p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a_1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a_1 = 1.$$

$$p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + a_2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{4}{\pi}.$$

Επομένως,

$$p_2(x) = x - \frac{4}{\pi}x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi}x^2 + 2x.$$

3ος τρόπος: (Αν στην άσκηση δεν ζητείται να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση των πολυωνύμων Lagrange, ή στη μορφή του Νεύτωνα, τότε μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:)

Έστω ότι το πολυώνυμο **2ου βαθμού** που αναζητούμε είναι στη μορφή $p_2(x) = ax^2 + bx + c$. Πρέπει να βρούμε τα a, b, c , αξιοποιώντας τις παρεμβολικές συνθήκες που είναι

$$p_2(x_0) = f(x_0) = 0, \quad p_2(x_1) = f(x_1) = \frac{\pi}{4}, \quad p_2(x_2) = f(x_2) = 0.$$

Άρα

$$p_2(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$$

$$p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{16} \cdot a + \frac{\pi}{4} \cdot b = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} \cdot a + \frac{\pi}{2} \cdot b = 0 \quad (6)$$

Λύνουμε το σύστημα των (5) και (6) και βρίσκουμε: $a = -\frac{4}{\pi}, \quad b = 2.$

Επομένως, $p_2(x) = -\frac{4}{\pi}x^2 + 2x.$

Άσκηση 2

- (i) Υπολογίστε τα βάρη w_0, w_1, w_2 στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού,

$$\int_0^4 f(x) dx \approx w_0 f(1) + w_1 f(2) + w_2 f(3).$$

Ποιός είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμου που ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς;

- (ii) Χρησιμοποιήστε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης του προηγούμενου ερωτήματος για να υπολογίσετε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^4 \sqrt{x} dx$. Πόσο είναι το σφάλμα;

Λύση

i)
$$\int_0^4 f(x) dx \approx w_0 f(1) + w_1 f(2) + w_2 f(3).$$

Για να δούμε ποιός είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμου που ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς, θα δοκιμάσουμε με τη σειρά τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3, \dots$

Για $f(x) = 1$ έχουμε:

$$\int_0^4 1 dx = w_0 + w_1 + w_2 \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 = [x]_0^4 \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 4. \quad (7)$$

Για $f(x) = x$ έχουμε:

$$\int_0^4 x dx = w_0 + 2w_1 + 3w_2 \Leftrightarrow w_0 + 2w_1 + 3w_2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \Leftrightarrow w_0 + 2w_1 + 3w_2 = 8. \quad (8)$$

Για $f(x) = x^2$ έχουμε:

$$\int_0^4 x^2 dx = w_0 + 4w_1 + 9w_2 \Leftrightarrow w_0 + 4w_1 + 9w_2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \Leftrightarrow w_0 + 4w_1 + 9w_2 = \frac{64}{3}. \quad (9)$$

Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων (7)–(9) και βρίσκουμε

$$w_0 = \frac{8}{3}, \quad w_1 = -\frac{4}{3}, \quad w_2 = \frac{8}{3}.$$

Άρα ο τύπος

$$\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{8}{3} f(1) - \frac{4}{3} f(2) + \frac{8}{3} f(3),$$

μέχρι τώρα σίγουρα ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού 2.

Συνεχίζουμε με την $f(x) = x^3$:

$$\int_0^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64$$

και

$$\frac{8}{3} \cdot 1^3 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{8}{3} \cdot 3^3 = \frac{8}{3} - \frac{32}{3} + 72 = 64.$$

Άρα ο τύπος αυτός **ολοκληρώνει ακριβώς και πολυώνυμα βαθμού 3**.

Συνεχίζουμε με την $f(x) = x^4$:

$$\int_0^4 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{1024}{5} = 204.8.$$

και

$$\frac{8}{3} \cdot 1^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^4 + \frac{8}{3} \cdot 3^4 = \frac{8}{3} - \frac{64}{3} + 216 = 197.333,$$

άρα **δεν** ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού 4.

(ii) Θα εφαρμόσουμε τον τύπο αυτό για την προσέγγιση του $\int_0^4 \sqrt{x} dx$. Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} = \frac{16}{3} \approx 5.333333.$$

Η προσέγγιση που θα πάρουμε με το συγκεκριμένο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι

$$\frac{8}{3} \cdot \sqrt{1} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2} + \frac{8}{3} \sqrt{3} = \frac{8(1 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{2}}{3} \approx 5.399851$$

Συνεπώς, το **απόλυτο σφάλμα** είναι

$$|5.333333 - 5.399851| = 0.066518 \approx 7\%$$

ενώ το **σχετικό σφάλμα** είναι (κατ' απόλυτη τιμή) ίσο με

$$\left| \frac{5.333333 - 5.399851}{5.333333} \right| = 0.012472 \approx 1\%.$$

Άσκηση 3

Ο πληθυσμός της Ελλάδας για τα έτη 1981, 1991 και 2001, δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

x (Έτος)	1981	1991	2001
y (Πληθυσμός)	9,740,000	10,260,000	10,960,000

Εκτιμήστε τον πληθυσμό της Ελλάδας κατά το έτος 1984,

- 1 με τη γραμμική *spline* παρεμβολής,
- 2 με το πολυώνυμο παρεμβολής $p_2(x)$ (βαθμού ≤ 2) που παρεμβάλλεται στις τιμές του πληθυσμού τα έτη $x_0 = 1981$, $x_1 = 1991$ και $x_2 = 2001$.

Λύση

(1) Η **γραμμική *spline* παρεμβολής** στις τιμές του πληθυσμού τα έτη $x_0 = 1981$, $x_1 = 1991$, και $x_2 = 2001$, θα είναι μια **συνεχής** συνάρτηση στο διάστημα $[1981, 2001]$, και στα υποδιαστήματα $[1981, 1991]$ και $[1991, 2001]$ θα είναι ένα **πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1**.

Άρα στο διάστημα $[1981, 1991]$ θα βρούμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1981, 9\,740\,000)$ και $(1991, 10\,260\,000)$. Η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι:

$$\frac{y - 9\,740\,000}{x - 1981} = \frac{10\,260\,000 - 9\,740\,000}{1991 - 1981} \Leftrightarrow y = 52\,000(x - 1981) + 9\,740\,000$$

Άρα στο διάστημα $[1981, 1991]$ η γραμμική *spline* παρεμβολής δίνεται από τον τύπο

$$s(x) = 52\,000(x - 1981) + 9\,740\,000,$$

και επομένως η εκτίμηση του πληθυσμού της Ελλάδας κατά το έτος 1984 είναι

$$s(1984) = 52\,000(1984 - 1981) + 9\,740\,000 = 9\,896\,000.$$

(2) Πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού ≤ 2 στη μορφή του Νεύτωνα:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - 1981) + a_2(x - 1981)(x - 1991).$$

Πρέπει να βρούμε τα a_0, a_1, a_2 , αξιοποιώντας τις παρεμβολικές συνθήκες:

$$p_2(1981) = 9\,740\,000, \quad p_2(1991) = 10\,260\,000, \quad p_2(2001) = 10\,960\,000.$$

Άρα

$$p_2(1981) = 9\,740\,000 \Leftrightarrow a_0 = 9\,740\,000.$$

$$p_2(1991) = 10\,260\,000 \Leftrightarrow 9\,740\,000 + a_1 \cdot 10 = 10\,260\,000 \Leftrightarrow a_1 = 52\,000.$$

$$p_2(2001) = 10\,960\,000 \Leftrightarrow 9\,740\,000 + 52\,000 \cdot 20 + a_2 \cdot 20 \cdot 10 = 10\,960\,000 \\ \Leftrightarrow a_2 = 900.$$

Επομένως,

$$p_2(x) = 9\,740\,000 + 52\,000(x - 1981) + 900(x - 1981)(x - 1991) \\ \Rightarrow p_2(1984) = 9\,740\,000 + 52\,000 \cdot 3 + 900 \cdot 3 \cdot (-7) = 9\,877\,100.$$

Άσκηση 4

Βρείτε τα b, c, d έτσι ώστε η συνάρτηση

$$s(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + d(x - 1)^3 & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

να είναι μια φυσική κυβική spline.

Λύση. Για να είναι η s κυβική spline θα πρέπει να είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 3 σε κάθε υποδιάστημα (προφανές) και, επιπλέον, να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το διάστημα (δηλαδή οι s, s' και s'' πρέπει να είναι συνεχείς σε ολόκληρο το $[0, 2]$).

Προφανώς οι s, s' και s'' είναι συνεχείς παντού εκτός (ίσως) από το σημείο $x = 1$, άρα θα πρέπει να βρούμε τα b, c, d έτσι ώστε:

$$(1) \quad s_-(1) = s_+(1),$$

$$(2) \quad s'_-(1) = s'_+(1), \text{ και}$$

$$(3) \quad s''_-(1) = s''_+(1).$$

Προφανώς

$$s'(x) = \begin{cases} 2 - 3x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2 & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

και

$$s''(x) = \begin{cases} -6x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2c + 6d(x-1) & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Άρα

$$(1) \Leftrightarrow 2 = 2. \quad \checkmark$$

$$(2) \Leftrightarrow -1 = b.$$

$$(3) \Leftrightarrow -6 = 2c \Leftrightarrow c = -3.$$

Επιπλέον, για να είναι η s **φυσική** κυβική spline θα πρέπει

$$s''(0) = 0 \quad \checkmark \quad \text{και} \quad s''(2) = 0 \stackrel{c=-3}{\Leftrightarrow} -6 + 6d(2-1) = 0 \Leftrightarrow d = 1.$$

Άρα: $b = -1$, $c = -3$, $d = 1$.

Άσκηση 5

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \cos \frac{\pi x}{3}$. Υπολογίστε το $\int_0^1 f(x) dx$ με

- ❶ τον κανόνα του τραπεζίου στο διάστημα $[0, 1]$,
- ❷ τον κανόνα του Simpson στο διάστημα $[0, 1]$ και
- ❸ το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου στα διαστήματα $[0, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$,

και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος.

Λύση. Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{3} dx = \frac{3}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \right) = \frac{3}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

(1) Ο τύπος του τραπεζίου στο διάστημα $[0, 1]$ είναι

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(0) + f(1)).$$

Εδώ: $f(0) = \cos \frac{\pi \cdot 0}{3} = \cos 0 = 1$, $f(1) = \cos \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{1}{2}$, οπότε

$$\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{3} dx \approx \frac{1-0}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς, το **απόλυτο σφάλμα** είναι: $\left| \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3}{4} \right| = 0.077 \approx 8\%$

ενώ το **σχετικό σφάλμα** είναι (κατ' απόλυτη τιμή) ίσο με

$$\left| \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \right| = 0.093 \approx 9\%.$$

(2) Ο τύπος του Simpson στο διάστημα $[0, 1]$ είναι

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1-0}{2} \left[\frac{1}{3} f(0) + \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} f(1) \right].$$

Όμως $f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα

$$\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{3} dx \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{3+4\sqrt{3}}{12}.$$

Τώρα το **απόλυτο σφάλμα** είναι: $\left| \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3+4\sqrt{3}}{12} \right| = 0.00036$

ενώ το **σχετικό σφάλμα** είναι (κατ' απόλυτη τιμή) ίσο με

$$\left| \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3+4\sqrt{3}}{12}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \right| = 0.00043.$$

(3) Ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου στα διαστήματα $[0, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Τώρα το απόλυτο σφάλμα είναι

$$\left| \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{8} \right| = 0.019 \approx 2\%$$

ενώ το σχετικό σφάλμα είναι (κατ' απόλυτη τιμή) ίσο με

$$\left| \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{8}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \right| = 0.023 \approx 2\%$$

Άσκηση 6

Θεωρήστε μια συνάρτηση $f \in C^3[0, 2]$, με $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ και $f(2) = 2$.

- ❶ Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής $p_2(x)$, βαθμού ≤ 2 , που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
- ❷ Με τη βοήθεια του (1) υπολογίστε μια εκτίμηση του $f(3/2)$.
- ❸ Υπολογίστε μια εκτίμηση του $f(3/2)$ χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων.

Λύση. (Μορφή Νεύτωνα)

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1x + a_2x(x - 1).$$

Άρα

$$p_2(0) = f(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1.$$

$$p_2(1) = f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + a_1 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow a_1 = 0.$$

$$p_2(2) = f(2) = 2 \Leftrightarrow 1 + a_2 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow a_2 = 1/2.$$

Επομένως,

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x - 1).$$

- (2) Βρίσκουμε μια εκτίμηση του $f(3/2)$ υπολογίζοντας την τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής στο $x = 3/2$:

$$p_2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{11}{8}.$$

- (3) Παρατηρούμε ότι το $3/2 \in [1, 2]$ άρα θα βρούμε το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής p_1 που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$.

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - 1). \quad (\text{Μορφή Νεύτωνα})$$

Άρα

$$p_1(1) = f(1) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1.$$

$$p_1(2) = f(2) = 2 \Leftrightarrow 1 + a_1 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow a_1 = 1.$$

Επομένως,

$$p_1(x) = 1 + (x - 1) = x \Rightarrow p_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Άσκηση 7

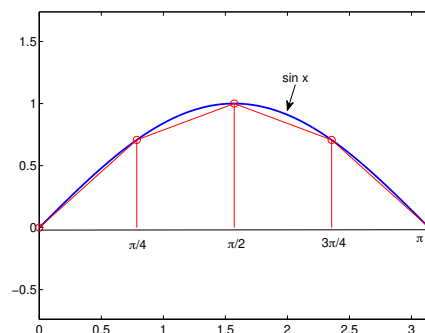
Υπολογίστε μια προσέγγιση του $\int_0^\pi \sin x \, dx$ με το σύνθετο τύπο του τραpezίου με 4 υποδιαστήματα. Υπολογίστε την απόλυτη τιμή του σφάλματος.

Λύση. Καταρχάς, η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

Χωρίζουμε το $[0, \pi]$ σε 4 υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{\pi-0}{4} = \frac{\pi}{4}$ το καθένα, και ονομάζουμε τα άκρα των υποδιαστημάτων ως εξής:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{4}, x_4 = \pi.$$



Τότε ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \, dx &\approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2} f(x_4) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 0 + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \right) = \frac{(1 + \sqrt{2})\pi}{4} \approx 1.896.\end{aligned}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$\left| 2 - \frac{(1 + \sqrt{2})\pi}{4} \right| = 0.104$$

ενώ το σχετικό σφάλμα είναι (κατ' απόλυτη τιμή) ίσο με

$$\left| \frac{2 - \frac{(1 + \sqrt{2})\pi}{4}}{2} \right| = 0.0519 \approx 5\%$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που πρέπει να πάρουμε για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \sin x \, dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, \pi]$ με σφάλμα $\leq 10^{-6}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f \in C^2[a, b]$, τότε η εκτίμηση του σφάλματος $|I(f) - Q_{n+1}^T(f)|$ για το σύνθετο τύπο του τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$|I(f) - Q_{n+1}^T(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \quad (10)$$

Εδώ

$$f(x) = \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad h = \frac{\pi - 0}{n} \Rightarrow h = \frac{\pi}{n},$$

όπου n είναι το πλήθος των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το διάστημα $[0, \pi]$. Άρα αρκεί να απαιτήσουμε

$$\frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |f''(x)| \leq 10^{-6}. \quad (11)$$

Όμως $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x$. Επομένως

$$|f''(x)| = |-\sin x| = |\sin x| \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in [0, \pi],$$

οπότε από την (11) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |f''(x)| &\leq \frac{\pi^3}{12n^2} \cdot 1 \leq 10^{-6} \Rightarrow n^2 \geq \frac{\pi^3}{12} \cdot 10^6 \\ &\Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{12}} \cdot 10^3 \approx 1607.44 \end{aligned}$$

Άρα αρκεί να πάρουμε $n = 1608$ υποδιαστήματα, επομένως 1609 κόμβους.

Άσκηση 9

Δίνονται οι ακόλουθες τιμές μιας συνάρτησης f :

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	10	8	7	6	5

- 1 Υπολογίστε μια προσεγγίση του ολοκληρώματος $\int_1^2 f(x) dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου.
- 2 Υπολογίστε μια προσεγγίση του ολοκληρώματος $\int_1^2 f(x) dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson.

Λύση

- ❶ Εδώ το διάστημα $[1, 2]$ χωρίζεται σε 4 υποδιαστήματα μήκους $h = 0.25$ το καθένα. Τότε ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου είναι

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &\approx h \left(\frac{1}{2} f(1) + f(1.25) + f(1.5) + f(1.75) + \frac{1}{2} f(2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 10 + 8 + 7 + 6 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = 7.125.\end{aligned}$$

- ❷ Για να υπολογίσουμε μια προσεγγίση του ολοκληρώματος $\int_1^2 f(x) dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson, έχουμε και πάλι τα 4 προηγούμενα υποδιαστήματα μήκους $h = 0.25$ το καθένα, και εφαρμόζουμε τον τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[1, 1.5]$ και $[1.5, 2]$, οπότε

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)) \\ &= \frac{1}{12} (10 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5) = \frac{85}{12} \approx 7.083.\end{aligned}$$

Άσκηση 10

Βρείτε μια εκτίμηση της απόλυτης τιμής του σφάλματος που θα προκύψει αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_2^5 \sin x dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h = 0.01$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $f \in C^2[a, b]$, τότε μια εκτίμηση του σφάλματος $|I(f) - Q_{n+1}^T(f)|$ για τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$|I(f) - Q_{n+1}^T(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Εδώ

$$f(x) = \sin x, \quad a = 2, \quad b = 5, \quad h = \frac{1}{100}.$$

Επομένως $f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x$, και άρα

$$|f''(x)| = |-\sin x| = |\sin x| \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in [2, 5].$$

Άρα για το σφάλμα έχουμε την εκτίμηση

$$|I(f) - Q_{n+1}^T(f)| \leq \frac{5-2}{12} \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot 1 \leq \frac{1}{4} \cdot 10^{-4}.$$