

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ.)

Δ. Μητσούδης

Η Μ.Π.Σ. για το πρόβλημα των δύο σημείων

Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Θεωρούμε και πάλι το γνωστό πρόβλημα:

Αναζητούμε συνάρτηση $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $q, f \in C[a, b]$, και $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Στη συνέχεια, θα χρειαστούμε τους ακόλουθους χώρους συναρτήσεων

$$\begin{aligned} C_0[a, b] &= \{u \in C[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}, \\ C_0^1[a, b] &= \{u \in C^1[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο V όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στον $C_0[a, b]$ και είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a, b]$.

Συγκεκριμένα, έστω ότι υπάρχει μια διαμέριση του $[a, b]$ σε $N + 1$ υποδιαστήματα,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

τέτοια ώστε η συνάρτησή μας να έχει συνεχή παράγωγο στο (x_j, x_{j+1}) που επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στα $[x_j, x_{j+1}]$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, N$.

Η Μ.Π.Σ.

Η Μ.Π.Σ. (finite element method) είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η Μ.Π.Σ. μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα με μεταβλητούς συντελεστές και προβλήματα που τίθενται σε χωρία πολλών διαστάσεων με ακανόνιστη γεωμετρία.

Τα βασικά «συστατικά» της Μ.Π.Σ. είναι τα εξής:

- 1 Αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα στη λεγόμενη **ασθενή** ή **μεταβολική** μορφή. Σε αυτή τη φάση το πρόβλημα τίθεται ως ένα πρόβλημα «άπειρων εξισώσεων», και οι συνοριακές συνθήκες υπεισέρχονται στη διατύπωση του προβλήματος μέσω του υποκείμενου δ.χ. συναρτήσεων.
- 2 Χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη μέθοδο Galerkin ώστε να **«λύσουμε το πρόβλημα σ' έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης»**. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στην ανάγκη επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.
- 3 Επιλέγουμε μια κατάλληλη βάση για τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης έτσι ώστε ο πίνακας του γραμμικού συστήματος στο οποίο θα καταλήξουμε να είναι **«αραιός»** (δηλαδή τα περισσότερα στοιχεία του να είναι μηδέν).

Αναδιατύπωση του προβλήματος (1)

Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ σε $N + 1$ υποδιαστήματα,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

και μια συνάρτηση v που ανήκει στον δ.χ. V που ορίσαμε νωρίτερα.

Τα σημεία x_i θα λέγονται **κόμβοι**, ενώ τα υποδιαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$ **στοιχεία**.

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την Δ.Ε. στην (1) με μια συνάρτηση $v \in V$, και έχουμε:

$$-u''v + quv = fv.$$

Η v συνήθως λέγεται **δοκιμαστική συνάρτηση** (test function).

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από x_j έως x_{j+1} , οπότε

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}} u''(x)v(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx.$$

$$- \int_{x_j}^{x_{j+1}} u''(x)v(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx.$$

Κάνουμε στον **πρώτο όρο** ολοκλήρωση κατά μέρη (παραγοντική ολοκλήρωση) και έτσι καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned} & - \left[u'(x)v(x) \right]_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx \\ & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx \\ \Leftrightarrow & -u'(x_{j+1})v(x_{j+1}) + u'(x_j)v(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx \\ & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή ισχύει σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N$. Επομένως, παίρνοντας αθροίσματα ως προς j έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N \left(-u'(x_{j+1})v(x_{j+1}) + u'(x_j)v(x_j) \right) + \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(x)v'(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)u(x)v(x) dx = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Επειδή η v είναι συνεχής στο $[a, b]$ από το πρώτο άθροισμα «επιζούν» μόνο ο πρώτος και ο τελευταίος όρος, οπότε

$$\begin{aligned} & -u'(x_{N+1})v(x_{N+1}) + u'(x_0)v(x_0) + \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx \\ & = \int_a^b f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $v(x_{N+1}) = v(b) = 0$ και $v(x_0) = v(a) = 0$ μιας και η συνάρτηση $v \in V$ και ο χώρος V περιέχει συναρτήσεις που μηδενίζονται στα άκρα a και b του διαστήματος $[a, b]$. Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx,$$

την οποία, αν ανακαλέσουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, μπορούμε να την γράψουμε ισοδύναμα στη μορφή

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v).$$

Έτσι έχουμε καταφέρει να αναδιατυπώσουμε το αρχικό πρόβλημα (1) στην ακόλουθη μορφή:

Αναζητούμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

Η (2) λέγεται **ασθενής** ή **μεταβολική** ή **γενικευμένη** μορφή του προβλήματος.

Συμβολίζουμε με h το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος του διαμερισμού μας, δηλαδή:

$$h = \max_{0 \leq j \leq N} (x_{j+1} - x_j).$$

Τώρα, η ιδέα της **μεθόδου Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων** είναι απλή:

Επιλέγουμε έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του δ.χ. V , έστω V_h , και απαιτούμε να ισχύει η (2) στον V_h .

Δηλαδή, αναζητούμε $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$(u'_h, \chi') + (qu_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in V_h. \quad (3)$$

Ο υπόχωρος V_h

Συγκεκριμένα, θα επιλέξουμε ως **υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης** το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι:

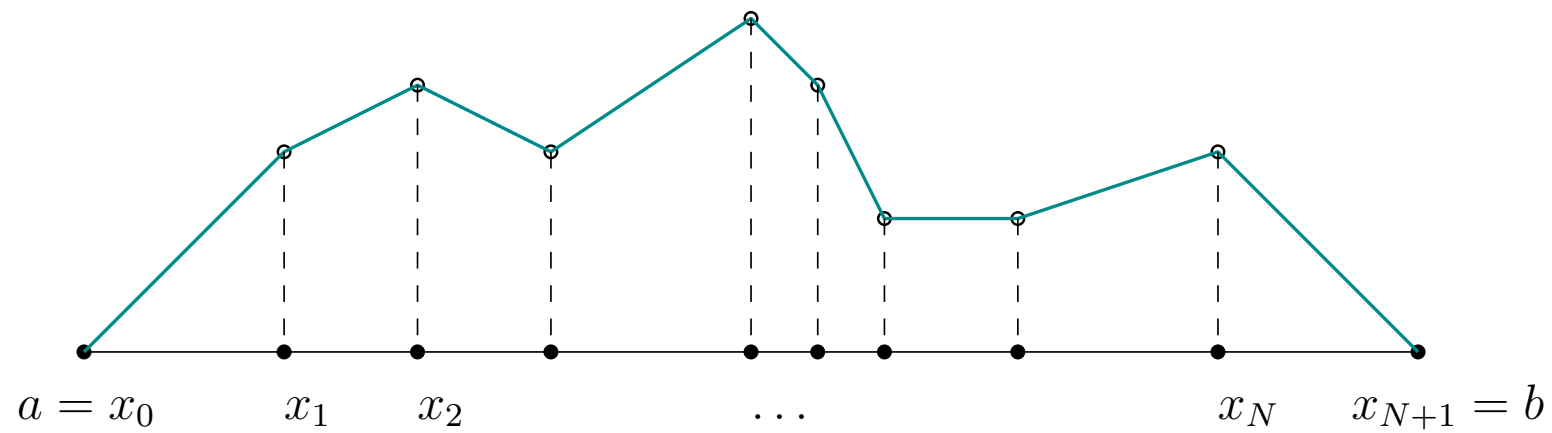
- συνεχείς στο $[a, b]$,
- μηδενίζονται στα άκρα a και b ,
- και ο περιορισμός τους σε κάθε υποδιάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 1.

(Δηλαδή τον υπόχωρο των γραμμικών splines που μηδενίζονται στα άκρα a και b).

Συμβολικά,

$$V_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \text{ και } \varphi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}.$$

Συναρτήσεις του V_h

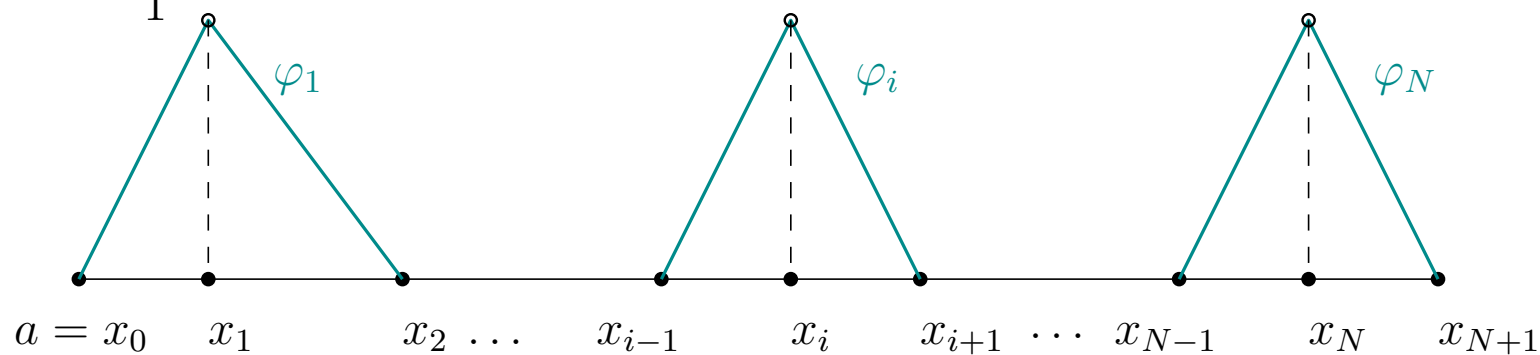


Βάση του V_h

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

για $i = 1, \dots, N$.



Προφανώς $\varphi_i \in V_h$ για $i = 1, \dots, N$ και $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, για $i, j = 1, \dots, N$.

Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ αποτελεί βάση του V_h , άρα έχουμε ότι η διάσταση του V_h είναι ίση με N .

Δεδομένου ότι $\varphi_i \in V_h$, και η (3) ισχύει για κάθε $\chi \in V_h$, έχουμε ότι:

$$(u'_h, \varphi'_i) + (qu_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Γράφουμε την άγνωστη συνάρτηση u_h (που είναι στοιχείο του V_h) ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$, δηλαδή

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x). \quad (5)$$

Άρα θα έχουμε προσδιορίσει μια **προσέγγιση της λύσης** u αν καταφέρουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές $a_j, j = 1, \dots, N$.

Αντικαθιστούμε την (5) στην (4) και έχουμε :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^N a_j \varphi'_j, \varphi'_i \right) + \left(q \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j, \varphi_i \right) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^N (\varphi'_j, \varphi'_i) a_j + \sum_{j=1}^N (q\varphi_j, \varphi_i) a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^N [(\varphi'_j, \varphi'_i) + (q\varphi_j, \varphi_i)] a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{6}$$

Δηλαδή, καταλήξαμε σε ένα $N \times N$ γραμμικό σύστημα της μορφής

$$A\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (7)$$

όπου

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \text{με } F_i = (f, \varphi_i),$$

και A είναι ένας $N \times N$ πίνακας που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των πινάκων S, M , με στοιχεία $A_{ij} = S_{ij} + M_{ij}$, όπου

$$S_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i), \quad \text{και} \quad M_{ij} = (q\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Ο πίνακας S είναι γνωστός ως **πίνακας ακαμψίας** (**stifness matrix**), ενώ ο πίνακας M ως **πίνακας μάζας** (**mass matrix**).

Αποδεικνύεται ότι το γραμμικό σύστημα (7) έχει μοναδική λύση.

Σημειώστε ότι ο πίνακας A είναι **συμμετρικός** ($A_{ij} = A_{ji}$) και **θετικά ορισμένος** ($x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$).

Επιπλέον, ο A είναι **αραιός**, συγκεκριμένα είναι τριδιαγώνιος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις βάσης φ_i λαμβάνουν μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε έναν **ομοιόμορφο διαμερισμό** $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, με βήμα $h = (b - a)/(N + 1)$. Δηλαδή, οι κόμβοι είναι: $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N + 1$. Τότε οι συναρτήσεις βάσης παίρνουν τη μορφή

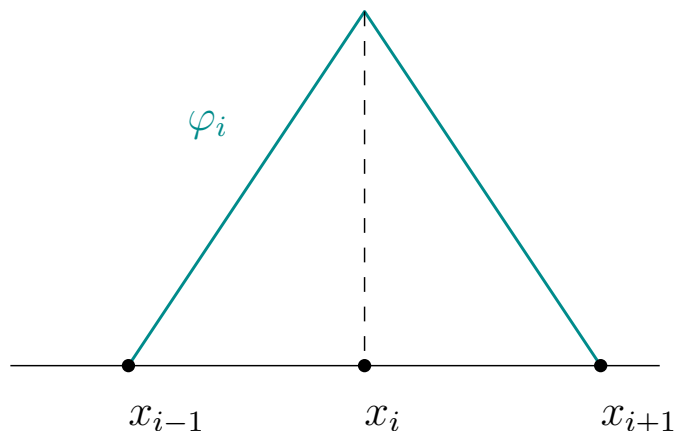
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

και οι παράγωγοί τους είναι ίσες με

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία των πινάκων μάζας και ακαμψίας, δηλαδή τα $S_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i)$ και $M_{ij} = (q\varphi_j, \varphi_i)$.

1η περίπτωση: $j = i$



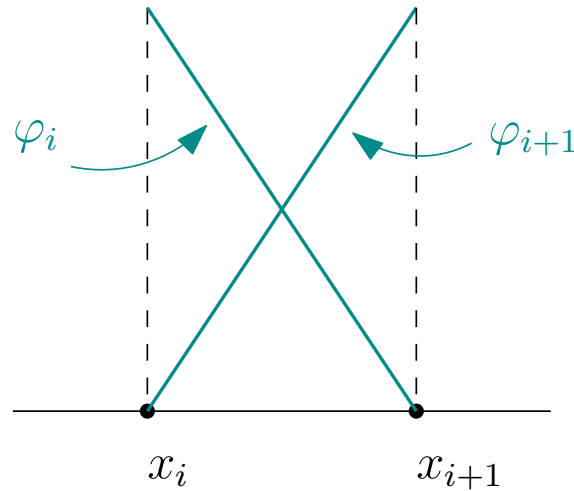
$$S_{ii} = \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2h}{h^2} = \frac{2}{h}.$$

$$M_{ii} = \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^2 dx.$$

Προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά με τον τύπο του τραπεζίου και έχουμε:

$$M_{ii} \approx \frac{1}{2} h (q(x_i) + 0) + \frac{1}{2} h (0 + q(x_i)) = h q(x_i).$$

2η περίπτωση: $j = i + 1$



$$S_{i,i+1} = \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} \right) dx = -\frac{1}{h}.$$

$$M_{i,i+1} = \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{x_{i+1} - x}{h} \cdot \frac{x - x_i}{h} dx \stackrel{\text{τραπ.}}{=} 0.$$

3η περίπτωση: $j = i - 1$

Η περίπτωση αυτή είναι εντελώς ανάλογη με την προηγούμενη, άρα

$$S_{i,i-1} = -\frac{1}{h}, \quad M_{i,i-1} = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το (i, j) στοιχείο και των δύο πινάκων για $|i - j| \geq 2$ είναι προφανώς μηδέν, άρα ο πίνακας A είναι **τριδιαγώνιος**.

Ας δούμε τώρα πώς υπολογίζουμε τα στοιχεία του διανύσματος F που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος του γραμμικού συστήματος (7). Έχουμε

$$\begin{aligned} F_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1} - x}{h} dx. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά με τον τύπο του τραπεζίου και έχουμε:

$$F_i \approx \frac{h}{2} \left(f(x_i) \cdot \frac{h}{h} + 0 \right) + \frac{h}{2} \left(0 + f(x_i) \cdot \frac{h}{h} \right) = h f(x_i).$$

Άρα καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα $A\mathbf{a} = \mathbf{F}$ με

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + hq(x_1) & -\frac{1}{h} & & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_2) & -\frac{1}{h} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_{N-1}) & -\frac{1}{h} \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + hq(x_N) \end{pmatrix}$$

και $\mathbf{F} = (hf(x_1), hf(x_2), \dots, hf(x_{N-1}), hf(x_N))^T$.

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με h , το σύστημα γράφεται στη μορφή $\tilde{A}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{F}}$ με

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 & & & \\ -1 & 2 + h^2 q(x_2) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 + h^2 q(x_{N-1}) & -1 \\ & & & -1 & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix} \quad (9)$$

και $\tilde{\mathbf{F}} = (h^2 f(x_1), h^2 f(x_2), \dots, h^2 f(x_{N-1}), h^2 f(x_N))^T$.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση του **ομοιόμορφου διαμερισμού**, αν **προσεγγίσουμε τα ολοκληρώματα με τη μέθοδο του τραπεζίου**, καταλήγουμε στο ίδιο ακριβώς γραμμικό σύστημα με εκείνο της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών που μελετήσαμε για το ίδιο πρόβλημα.

Σφάλμα της μεθόδου

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι:

Αν $u \in C^2[a, b]$ είναι λύση του (1) και $u_h \in V_h$ είναι λύση του (3), τότε υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη των u και h , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\|u' - u'_h\| &\leq C h \|u''\|, \\ \|u - u_h\| &\leq C h^2 \|u''\|.\end{aligned}$$

Η νόρμα που εμφανίζεται σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι η L^2 -νόρμα.

Υπενθύμιση: Η L^2 -νόρμα μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ ορίζεται ως:

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}. \quad (10)$$

Συνοριακές συνθήκες Neumann

Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b], \\ u'(a) = u'(b) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $q, f \in C[a, b]$, και $q(x) \geq q^* > 0, \forall x \in [a, b]$.

$\tilde{V}$: όλες οι συναρτήσεις που ανήκουν στον $C[a, b]$ και είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a, b]$
(δηλαδή δεν απαιτούμε πλέον να μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$).

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της Δ.Ε. με μια δοκιμαστική συνάρτηση $v \in \tilde{V}$, ολοκληρώνουμε, μετά κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στον όρο $-\int u''v$, και καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος

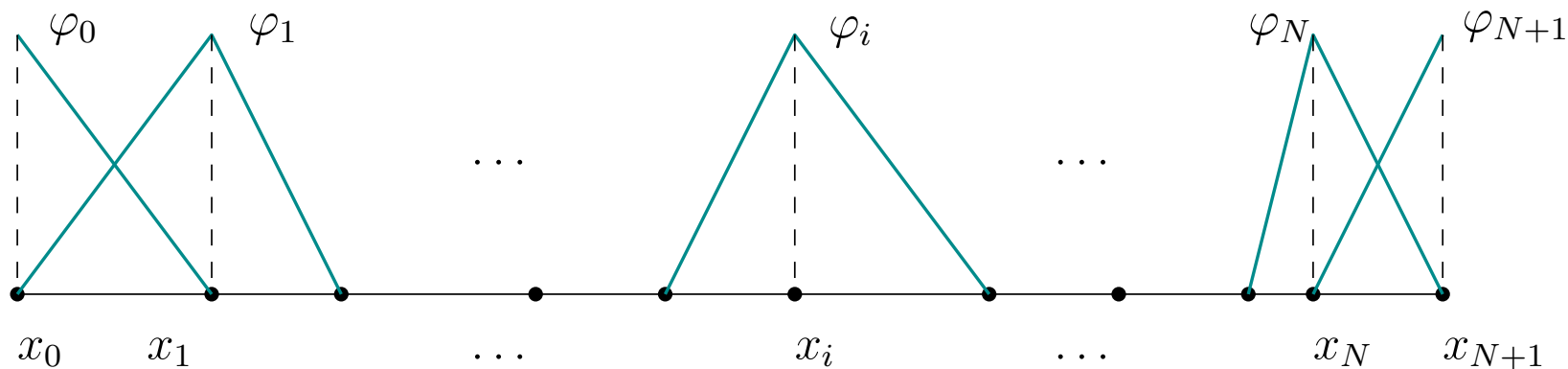
$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (12)$$

Η μόνη διαφορά με πριν είναι ότι τώρα οι συναρτήσεις μας ανήκουν σε διαφορετικό χώρο (στον $\tilde{V}$ και όχι στον V).

Θεωρούμε τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης:

$$\tilde{V}_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\},$$

και παίρνουμε ως συναρτήσεις βάσης τις συναρτήσεις «στέγης» φ_i :



όπου έχουμε προσθέσει δύο επιπλέον συναρτήσεις βάσης, τις φ_0 και φ_{N+1} .

Το σύνολο $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N+1}$ αποτελεί βάση του $\tilde{V}_h$, ο οποίος τώρα έχει διάσταση $N + 2$.

Το αντίστοιχο **διακριτό** πρόβλημα του (12) είναι ότι αναζητούμε $u_h \in \tilde{V}_h$ τέτοια ώστε:

$$(u'_h, \chi') + (qu_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in \tilde{V}_h. \quad (13)$$

Παίρνουμε

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} a_j \varphi_j(x) \quad \text{και} \quad \chi = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N+1,$$

και όπως πριν καταλήγουμε σε ένα $(N+2) \times (N+2)$ γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές $a_j, j = 0, 1, \dots, N+1$.

Αποδεικνύεται ότι κάτω από τις υποθέσεις που βάλαμε για τις f και q , και το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπόχωρους πεπερασμένων στοιχείων που αποτελούνται από κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις (splines) υψηλότερου βαθμού r , με r ακέραιο (≥ 2).

Π.χ., για $r = 3$ έχουμε **κυβικές splines**.

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πάρουμε προσεγγίσεις Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων με σφάλμα $\|u - u_h\|$ της τάξης $O(h^{r+1})$.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε δύο διαστάσεις

Στοιχεία από τον Διανυσματικό Λογισμό

1D: Θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

2D: Θεώρημα της Απόκλισης (Divergence Theorem). Αν Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ με λείο ή κατά τμήμα λείο σύνορο $\partial\Omega$, και F είναι ένα (αρκούντως ομαλό) διανυσματικό πεδίο στο $\overline{\Omega}$, τότε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot n, \quad (14)$$

όπου n είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$ και είναι μια συνάρτηση του $(x, y) \in \partial\Omega$.

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (14) είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα, ενώ αυτό στο δεξί μέλος είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Συμβολισμός

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u.$$

Στις πολλές διαστάσεις ισχύει ο ακόλουθος «τύπος του γινομένου»

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u. \quad (15)$$

Τύπος του Green

Θα μας χρειαστεί ο τύπος του Green, που είναι το ανάλογο της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε περισσότερες διαστάσεις.

Ο τύπος του Green προκύπτει αν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της (15) πάνω στο Ω και, μετά, χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της απόκλισης.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \stackrel{(14)}{\Rightarrow} \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \Rightarrow - \int_{\Omega} v \Delta u = - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u. \end{aligned} \quad (16)$$

$$- \int_{\Omega} v \Delta u = - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u$$

Το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson

Θεωρούμε την εξίσωση Poisson με σ.σ. Dirichlet σε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (17)$$

όπου f είναι δοσμένη συνάρτηση.

Όπως και στην περίπτωση της μίας διάστασης θα θεωρήσουμε έναν κατάλληλο χώρο V , στον οποίο ανήκουν συναρτήσεις v που είναι παραγωγίσιμες στο Ω και **ικανοποιούν συνθήκες Dirichlet $v = 0$ στο σύνορο $\partial\Omega$.**

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα στη λεγόμενη ασθενή μορφή επαναλαμβάνουμε τα βήματα που κάναμε στην περίπτωση της μιας διάστασης. Συγκεκριμένα,

- πολλαπλασιάζουμε την $-\Delta u = f$ με μια δοκιμαστική συνάρτηση $v \in V$ και παίρνουμε:

$$-\Delta u v = f v.$$

- Ολοκληρώνουμε πάνω στο Ω , εφαρμόζουμε τον τύπο του Green, και έχουμε:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v \quad \stackrel{(16)}{\Rightarrow} \quad - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}}_{=0 \text{ αφού } v \in V} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v.$$

Ασθενής μορφή του προβλήματος

Έτσι καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος:

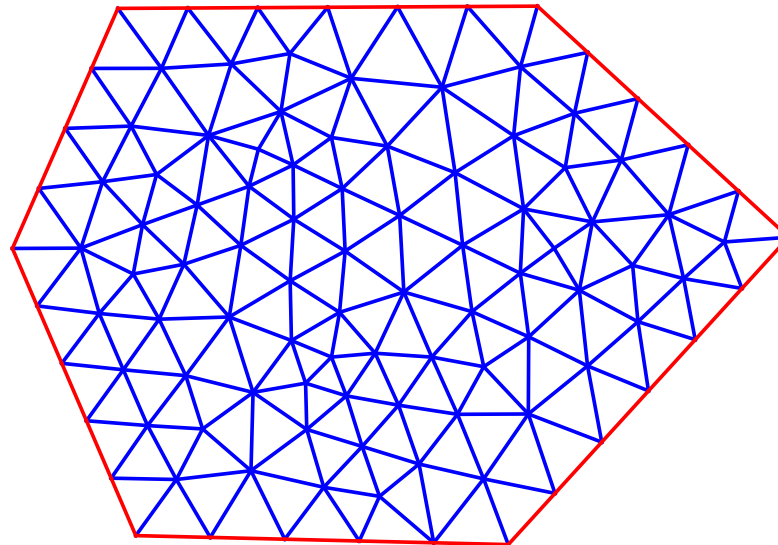
Αναζητούμε $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V. \quad (18)$$

Για να κατασκευάσουμε έναν κατάλληλο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του V , έστω V_h , θεωρούμε έναν διαμερισμό $\mathcal{T}_h$ του Ω σε ένα πεπερασμένο πλήθος τριγώνων τ_i , $i = 1, 2, \dots, N_t$, με μήκος της μεγαλύτερης πλευράς κάθε τριγώνου ίσο με h_i .

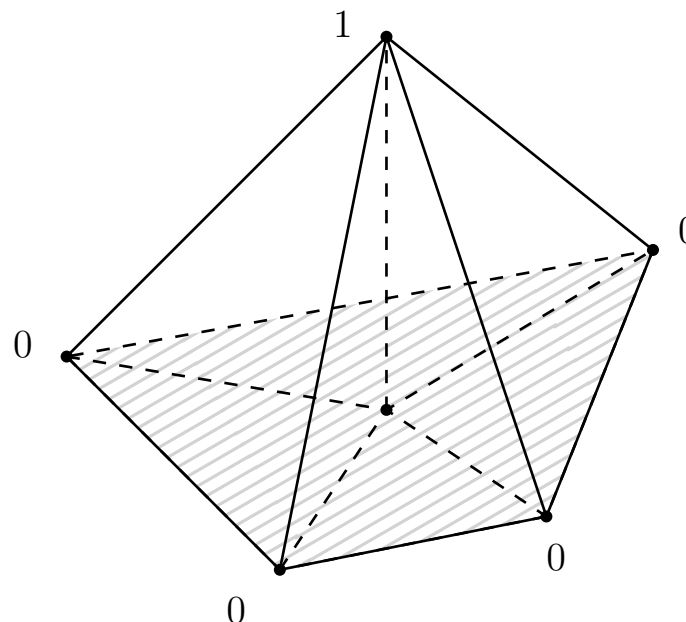
Έστω $h = \max_{1 \leq i \leq N_t} h_i$.

Από εδώ και στο εξής τα τρίγωνα θα αναφέρονται ως **στοιχεία** και το σύνολο όλων των τριγώνων $\tau \in \mathcal{T}_h$ ως **πλέγμα**. Οι κορυφές των τριγώνων θα λέγονται **κόμβοι**. Υποθέτουμε ότι ο τριγωνισμός μας έχει N εσωτερικούς κόμβους τους οποίους αριθμούμε (αυθαίρετα) από $1, \dots, N$.



Θεωρούμε τον υπόχωρο V_h των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο Ω και είναι γραμμικά πολυώνυμα σε κάθε στοιχείο $\tau \in \mathcal{T}_h$.

Ορίζουμε ως **συναρτήσεις βάσης** του V_h τις συναρτήσεις «πυραμίδες» φ_i που είναι γραμμικά πολυώνυμα σε κάθε τρίγωνο και παίρνουν την τιμή 1 στον i -κόμβο και την τιμή 0 σε όλους τους άλλους.



Επομένως, κάθε συνάρτηση $\chi \in V_h$ που είναι συνεχής στο Ω και γραμμική σε κάθε στοιχείο $\tau \in \mathcal{T}_h$ μπορούμε πλέον να την γράφουμε ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης, δηλαδή υπάρχουν $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, τέτοια ώστε

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x), \quad x \in \Omega.$$

(Είναι άμεσο να διαπιστώσει κανείς ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$, ο συντελεστής w_i είναι το «ύψος» της συνάρτησης χ στον i -κόμβο, δηλαδή $w_i = \chi(x_i)$.)

Αντί για να λύσουμε το πρόβλημα (18), θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα στον χώρο πεπερασμένης διάστασης V_h :

Αναζητούμε $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \chi = \int_{\Omega} f \chi, \quad \forall \chi \in V_h. \quad (19)$$

Αυτή είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Κάθε πλέγμα, μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις βάσης στους κόμβους, λέγεται πεπερασμένο στοιχείο. Προφανώς υπάρχουν πολλές διαφορετικές επιλογές πλέγματος και συναρτήσεων βάσης οι οποίες οδηγούν σε διαφορετικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων.

Στη συνέχεια, αφού κάθε $\chi \in V_h$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης μπορούμε, ισοδύναμα, να γράψουμε την (19) στη μορφή:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Επιπλέον, αφού και η $u_h \in V_h$, υπάρχουν $u_j \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x),$$

επομένως το πρόβλημα (20) γίνεται:

Αναζητούμε $u_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, N$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \right) u_j = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους που μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως

$$A \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (22)$$

όπου τα στοιχεία του $N \times N$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και του διανύσματος $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ είναι

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i, \quad f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

αντίστοιχα. Άρα για να υπολογίσουμε μια προσεγγιστική λύση $u_h \in V_h$ αρκεί να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (22).

Παράδειγμα

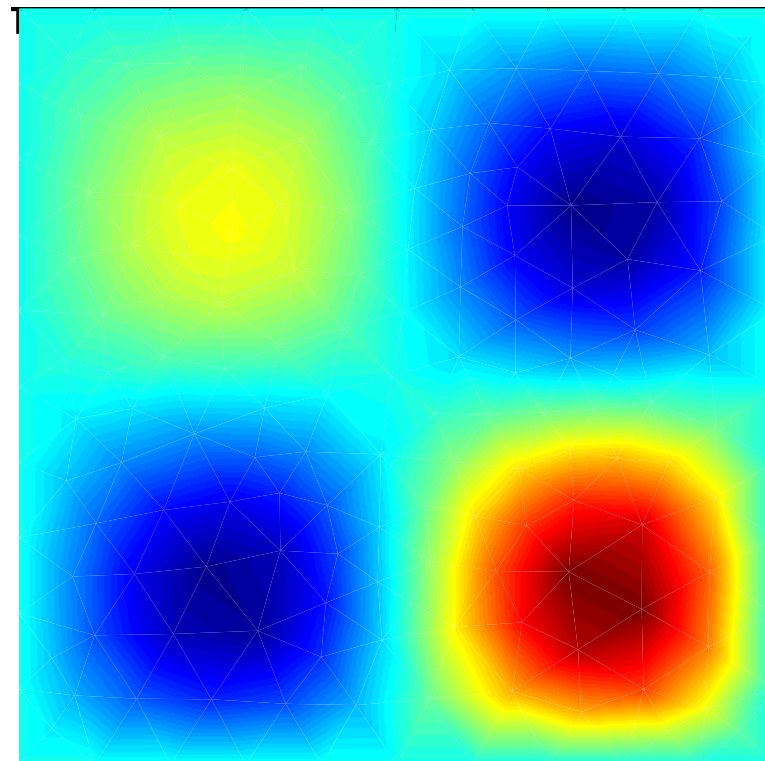
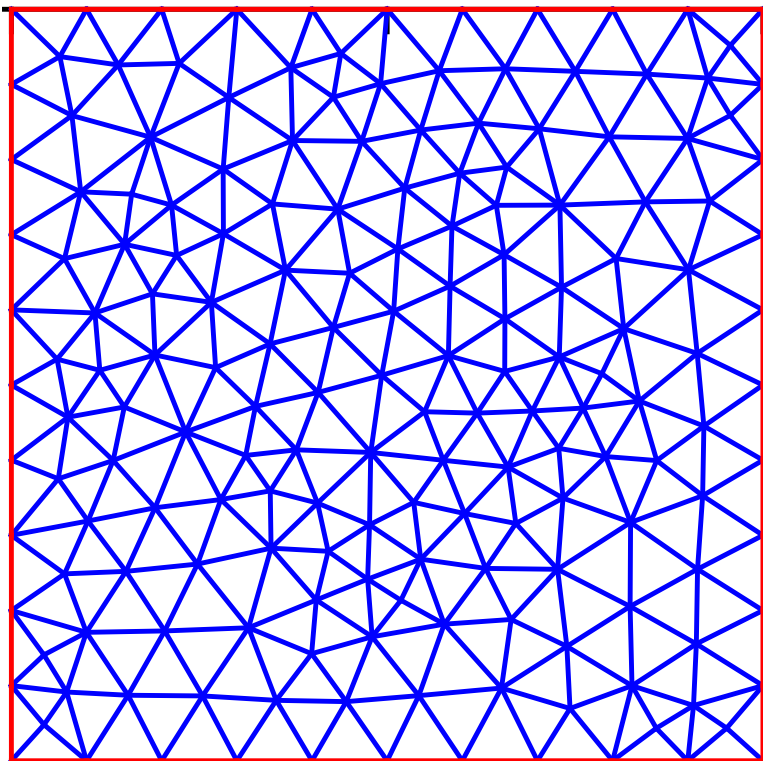
Χρησιμοποιούμε τη Μ.Π.Σ. για να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson στο μοναδιαίο τετράγωνο $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$,

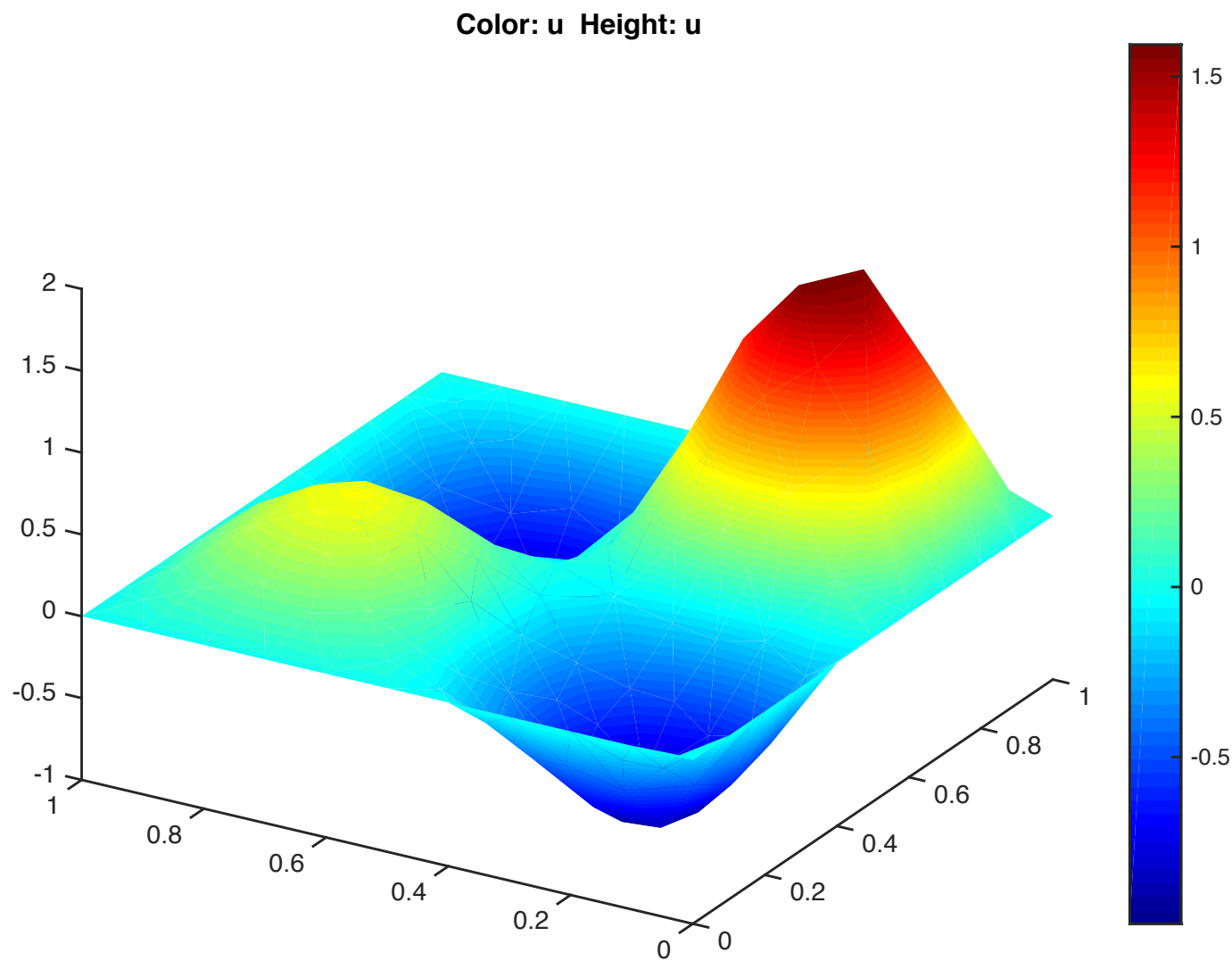
$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (23)$$

όπου

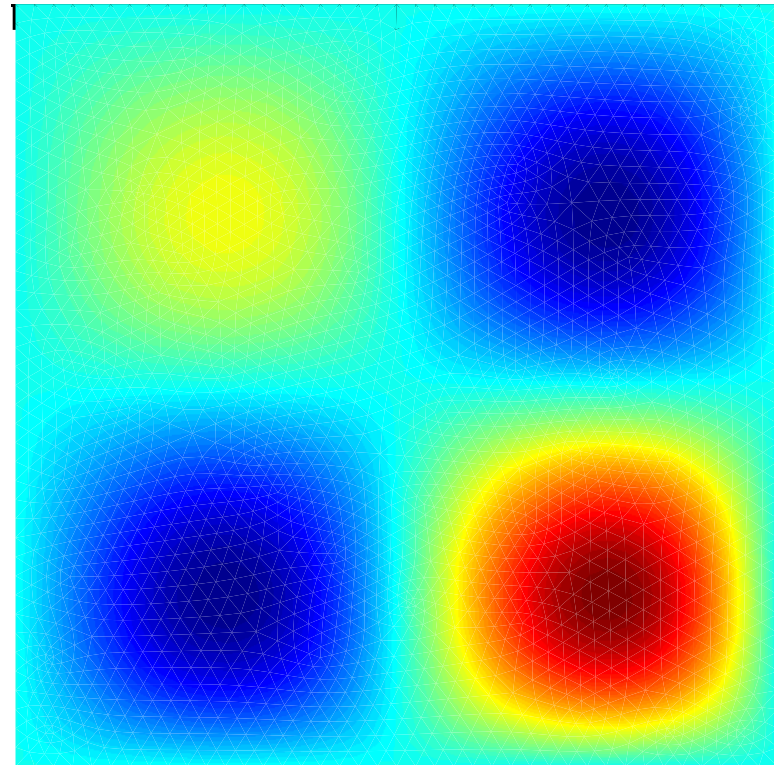
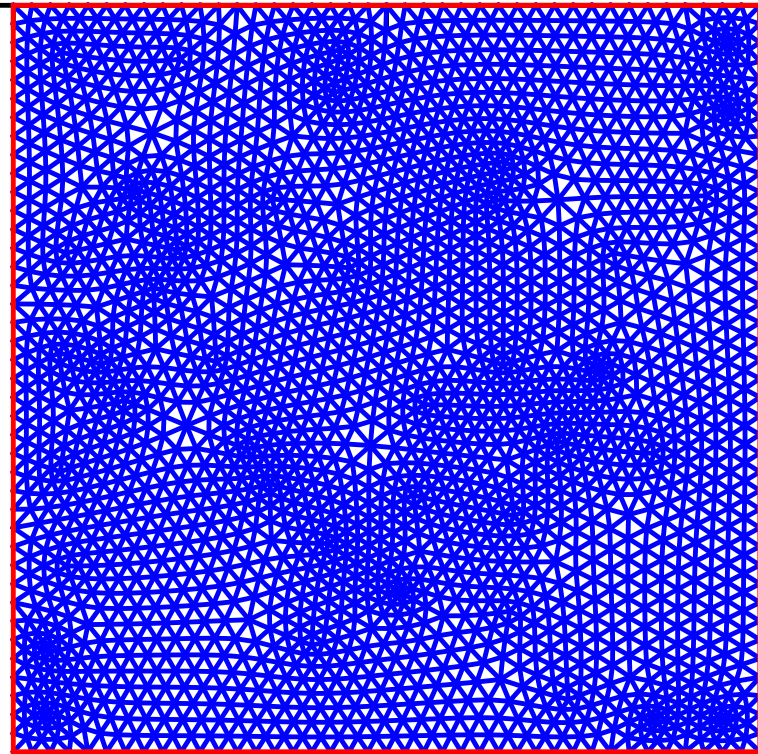
$$f(x, y) = 2(1 - 4\pi^2) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y} - 4\pi \sin(2\pi(x - y)) e^{x-y}.$$

Για το πρόβλημα αυτό η ακριβής λύση είναι: $u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y}$.





Αποτελέσματα για λεπτότερο διαμερισμό



Αποτελέσματα για λεπτότερο διαμερισμό

