

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών – Μέρος 4ο

Δ. Μητσούδης

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (Μ.Π.Δ) για Υπερβολικά Προβλήματα

Η εξίσωση μεταφοράς

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών για την εξίσωση μεταφοράς

Αναζητούμε $u : [0, T_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους τ.ω.

$$u_t(t, x) + au_x(t, x) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f], x \in \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αρχική Συνθήκη

t : χρονική μεταβλητή, x : χωρική μεταβλητή.

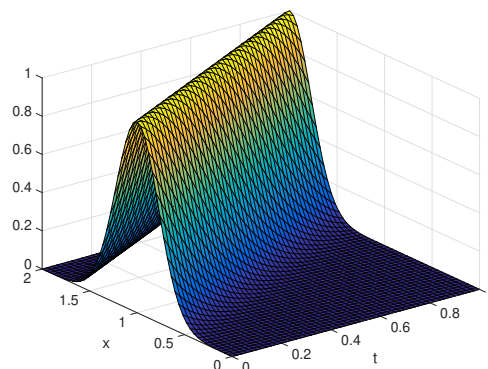
(Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι $a > 0$, και δεν θα λάβουμε υπόψιν συνοριακές συνθήκες.)

Είδαμε ότι για αυτό το Π.Α.Τ. η λύση μας είναι

$$u(t, x) = u_0(x - at).$$

Δηλ., η λύση μας είναι **σταθερή** κατά μήκος των χαρακτηριστικών ευθειών

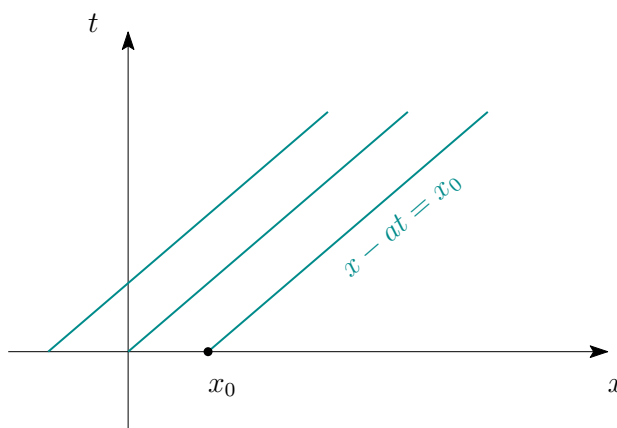
$$x - at = \text{σταθ.}$$



Αλλιώς, λέμε ότι οι «χαρακτηριστικές ευθείες» μεταφέρουν την αρχική τιμή $u(0, x_0) = u_0(x_0)$ κατά μήκος της ευθείας

$$x - at = x_0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{a}(x - x_0).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το **πεδίο εξάρτησης** της λύσης στο σημείο (t, x) είναι το σύνολο (σημείο) $\{x - at\}$.



Η συνθήκη CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)

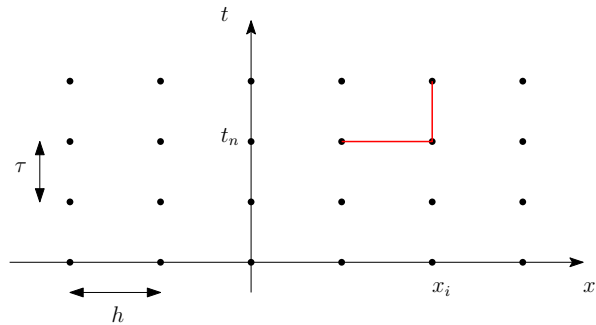
Θεωρούμε και πάλι ένα χρονικό βήμα $\tau := T_f / N_t$ και ένα χωρικό βήμα h και κατασκευάζουμε σημεία $(t_n, x_i) \in [0, T_f] \times \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad \text{και} \quad x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Προσεγγίζουμε την $u_t(t, x)$ με προς τα εμπρός διαφορά, και την $u_x(t, x)$ με προς τα πίσω διαφορά:

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau}$$

$$u_x(t, x) \approx \frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h}$$



Θα συμβολίζουμε (κατά τα γνωστά) $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$

Η συνθήκη CFL – 2

Άρα

$$u_t(t_n, x_i) + au_x(t_n, x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_n + \tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} + a \frac{u(t_n, x_i) - u(t_n, x_i - h)}{h} \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} = 0$$

Θέτουμε $\nu := \tau/h$ (αριθμός Courant), οπότε έχουμε:

$$U_i^{n+1} - U_i^n + a\nu U_i^n - a\nu U_{i-1}^n = 0$$

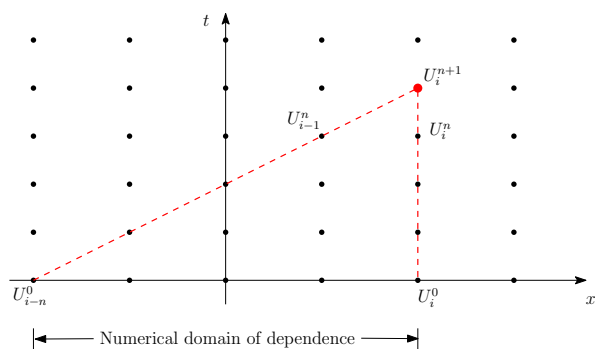
$\Downarrow$

$$U_i^{n+1} = (1 - a\nu) U_i^n + a\nu U_{i-1}^n,$$

$$n = 0, 1, \dots, N_t - 1,$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Προφανώς } U_i^0 = u_0(x_i)$$

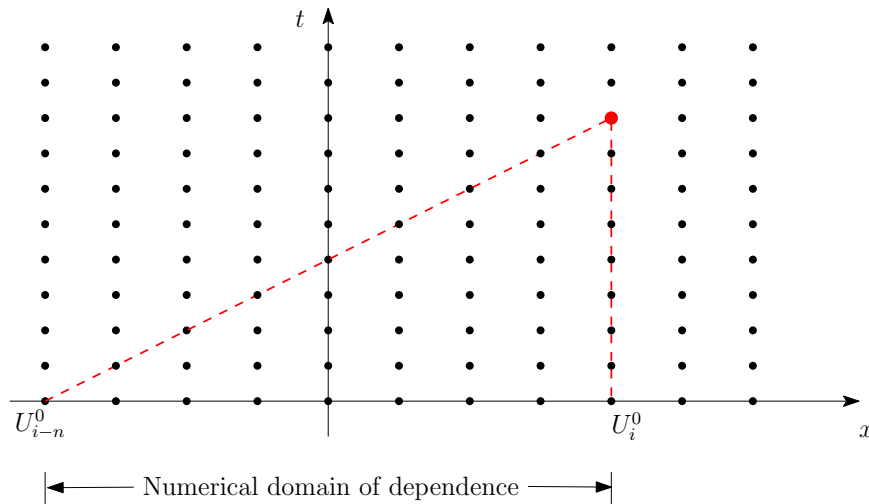


Η συνθήκη CFL – 3

Άρα, βλέπουμε ότι η τιμή της προσέγγισης U_i^{n+1} εξαρτάται μόνον από τις τιμές της αρχικής συνθήκης $u_0(x)$ για $x \in [x_{i-n}, x_i]$.

Το διάστημα αυτό λέγεται **(αριθμητικό) πεδίο εξάρτησης της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών**.

Αν πυκνώσουμε το πλέγμα μας, **διατηρώντας το πηλίκο $\frac{\tau}{h}$ σταθερό**, προφανώς οι κόμβοι που ανήκουν στο διάστημα αυτό θα αρχίσουν σιγά-σιγά να το «γεμίζουν».



Η συνθήκη CFL – 3

Καθώς πυκνώνουμε ολοένα και περισσότερο το πλέγμα μας (ομοιόμορφα) ελπίζουμε ότι η προσέγγιση της λύσης μας θα συγκλίνει προς την πραγματική τιμή στο σημείο (t, x) που υπενθυμίζουμε ότι είναι $u(x, t) = u_0(x - at)$.

Για να εξασφαλίσουμε ότι αυτό είναι δυνατόν να συμβεί θα πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι **το πεδίο εξάρτησης του προβλήματος βρίσκεται εντός του πεδίου εξάρτησης της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών**.

Αυτή είναι η περίφημη συνθήκη CFL.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ένας τρόπος να το πετύχουμε αυτό είναι η κλίση της χαρακτηριστικής ευθείας (που είναι ίση με $1/a$) να είναι μεγαλύτερη από την κλίση της αριστερής κόκκινης διακεκομμένης ευθείας στο προηγούμενο σχήμα (που είναι προφανώς ίση με ν).

Άρα, εδώ,

$$\text{CFL} \Leftrightarrow a \cdot \nu < 1$$

Προσοχή! Η συνθήκη CFL είναι μόνο μια **αναγκαία** συνθήκη ώστε μια αριθμητική μέθοδος να είναι ευσταθής.

Δηλαδή, υπάρχουν μέθοδοι που ικανοποιούν τη συνθήκη CFL και δεν είναι ευσταθείς. Από την άλλη μεριά, αν μια μέθοδος δεν ικανοποιεί τη συνθήκη CFL, τότε ΔΕΝ είναι ευσταθής.

Η μέθοδος upwind

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} u_t(t, x) + a u_x(t, x) &= 0, & \text{για κάθε } t \in [0, T_f], x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= u_0(x), & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αρχική Συνθήκη

Εδώ, $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δεδομένη συνάρτηση.

Θεωρούμε και πάλι χρονικό βήμα $\tau := T_f / N_t$, χωρικό βήμα h , και τα σημεία $(t_n, x_i) \in [0, T_f] \times \mathbb{R}$ με

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad \text{και} \quad x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη CFL θα πρέπει:

- **Αν $a > 0$** , να θεωρήσουμε προς τα εμπρός διαφορά για την προσέγγιση του όρου $u_t(t, x)$ και προς τα πίσω διαφορά για την προσέγγιση του $u_x(t, x)$.
- **Αν $a < 0$** να θεωρήσουμε προς τα εμπρός διαφορά για την προσέγγιση του όρου $u_t(t, x)$ και προς τα εμπρός διαφορά για την προσέγγιση του $u_x(t, x)$.

Η μέθοδος upwind

Δηλαδή,

- Αν $a > 0$:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} = 0$$

- Αν $a < 0$:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} = 0$$

Άρα

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} (1 - a\nu)U_i^n + a\nu U_{i-1}^n, & a > 0 \\ (1 + a\nu)U_i^n - a\nu U_{i+1}^n, & a < 0 \end{cases} \quad \text{για } \nu = \frac{\tau}{h}$$

όπου $n = 0, 1, \dots, N_t - 1, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, και

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ευστάθεια της μεθόδου upwind για $a > 0$.

Έστω $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f / N_t$ και $h \in \mathbb{R}, h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}, (k \in \mathbb{R})$, την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο upwind για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= (1 - a\nu)U_j^n + a\nu U_{j-1}^n \\ \Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikjh} &= (1 - a\nu)\lambda^n e^{ikjh} + a\nu \lambda^n e^{ik(j-1)h} \quad (\div \lambda^n e^{ikjh}) \\ \Rightarrow \lambda &= 1 - a\nu + a\nu e^{-ikh} = 1 - a\nu + a\nu \cos kh - i a\nu \sin kh \\ \Rightarrow |\lambda|^2 &= (1 - a\nu + a\nu \cos kh)^2 + (-a\nu \sin kh)^2 \\ \Rightarrow |\lambda|^2 &= (1 - a\nu)^2 + 2(1 - a\nu) a\nu \cos kh + a^2 \nu^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow |\lambda|^2 &= 1 - 2a\nu(1 - a\nu)(1 - \cos kh) \end{aligned}$$

Άρα

$$|\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 \leq 1 \Leftrightarrow a\nu(1 - a\nu)(1 - \cos kh) \geq 0 \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 - a\nu \geq 0$$

Δηλαδή η μέθοδος είναι ευσταθής αν και μόνον αν $a\nu \leq 1$ για $a > 0$.

Άσκηση:

Αποδείξτε ότι για $a < 0$ η μέθοδος upwind είναι ευσταθής αν και μόνον αν $-a\nu \leq 1$ ή, ισοδύναμα, αν $|a|\nu \leq 1$.

Παρατήρηση

Ας εξετάσουμε τη μέθοδο που προκύπτει αν θεωρήσουμε προς τα εμπρός διαφορά για την προσέγγιση του όρου $u_t(t, x)$ και κεντρική διαφορά για την προσέγγιση του $u_x(t, x)$:

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau}, \quad u_x(t, x) \approx \frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h}$$

Καταλήγουμε στο σχήμα:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} &= 0 \\ \Rightarrow U_i^{n+1} &= \frac{a\nu}{2} U_{i-1}^n + U_i^n - \frac{a\nu}{2} U_{i+1}^n, \end{aligned}$$

$$\nu := \tau/h, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η συνθήκη CFL ικανοποιείται για $a \cdot \nu < 1$, αλλά η μέθοδος αυτή είναι **ασταθής**.

Ευστάθεια της μεθόδου: $U_i^{n+1} = \frac{a\nu}{2}U_{i-1}^n + U_i^n - \frac{a\nu}{2}U_{i+1}^n$

Έστω $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδό μας για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned}U_j^{n+1} &= \frac{a\nu}{2}U_{j-1}^n + U_j^n - \frac{a\nu}{2}U_{j+1}^n \\ \Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikjh} &= \frac{a\nu}{2} \lambda^n e^{ik(j-1)h} + \lambda^n e^{ikjh} - \frac{a\nu}{2} \lambda^n e^{ik(j+1)h} \quad (\div \lambda^n e^{ikjh}) \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{a\nu}{2} e^{-ikh} + 1 - \frac{a\nu}{2} e^{ikh} = 1 + \frac{a\nu}{2} (\cos kh - i \sin kh - \cos kh - i \sin kh) \\ \Rightarrow \lambda &= 1 - i a\nu \sin kh \\ \Rightarrow |\lambda| &= \sqrt{1^2 + (-a\nu \sin kh)^2} = \sqrt{1 + (a\nu \sin kh)^2}.\end{aligned}$$

Αρα $|\lambda| > 1$, για κάθε $kh \neq m\pi$, $m = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$. Αρα η μέθοδος είναι (εν γένει) ασταθής.

Συνοριακές συνθήκες για τη μέθοδο Upwind

Για να υλοποιήσουμε τη μέθοδο Upwind στον υπολογιστή θα πρέπει να θεωρήσουμε ένα φραγμένο διάστημα για τη μεταβλητή x , και στη συνέχεια να ορίσουμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Ας θεωρήσουμε ότι $a > 0$. Τότε οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες και έχουν κλίση $\frac{1}{a} > 0$.

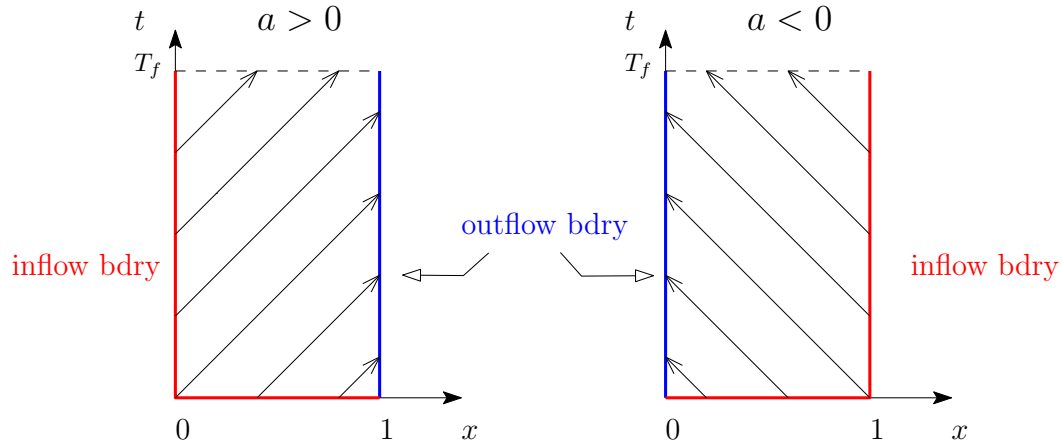
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t(t, x) + a u_x(t, x) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1.$$

Ερώτηση: Χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες κατά μήκος και των δύο ευθειών $x = 0$ και $x = 1$;

Συνοριακές συνθήκες

Καθώς οι τιμές της λύσης «ταξιδεύουν» κατά μήκος των χαρακτηριστικών, θα πρέπει να εφοδιάσουμε με αρχικές και συνοριακές συνθήκες τα μέρη του συνόρου από τα οποία «ξεκινούν» οι χαρακτηριστικές.



Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για a σταθ.

Αναζητούμε $u : [0, T_f] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \quad 0 < t < T_f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} u(t, 0) = u_1(t), & \text{αν } a > 0 \\ u(t, 1) = u_1(t), & \text{αν } a < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T_f \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{T_f}{N_t}, \quad h = \frac{1}{N_x}$$

Μέθοδος Upwind

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } a > 0, \quad U_0^n \\ \text{Αν } a < 0, \quad U_{N_x}^n \end{array} \right\} = u_1(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N_t,$$

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} (1 - a\tau)U_i^n + a\tau U_{i-1}^n, & \text{για } a > 0 \\ (1 + a\tau)U_i^n - a\tau U_{i+1}^n, & \text{για } a < 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, \dots, N_x.$$

Παράδειγμα

$$u_t(t, x) + 2 u_x(t, x) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1], x \in [0, 2]$$

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 10^4(0.1 - x)^2(0.2 - x)^2, & 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

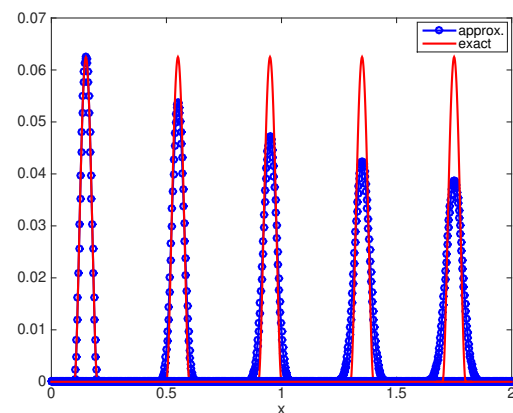
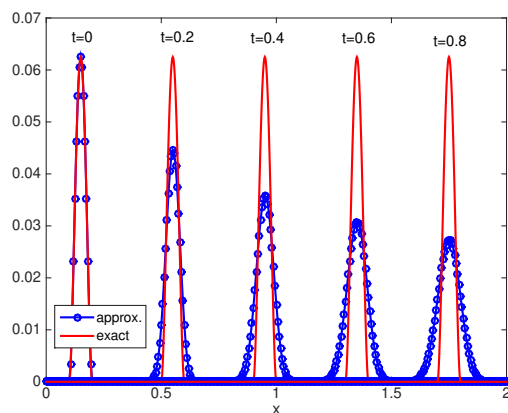
$$u(t, 0) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Ακριβής λύση: $u(t, x) = u_0(x - 2t)$

$$\nu = 0.4, \quad a \cdot \nu = 0.8 < 1$$

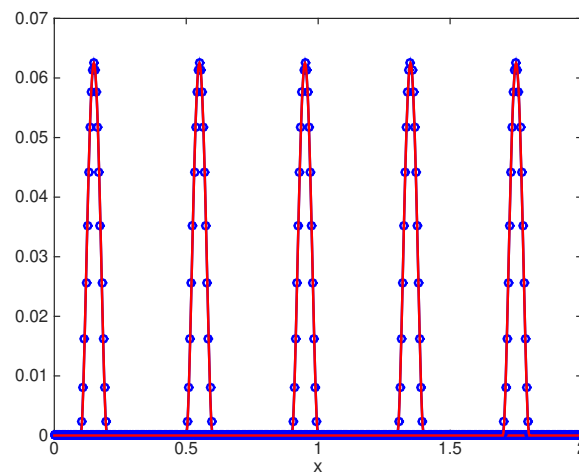
$$N_x = 320, \quad N_t = 400,$$

$$N_x = 800, \quad N_t = 1000.$$



$$\nu = 0.5, \quad a \cdot \nu = 1$$

$$N_x = 400, \quad N_t = 400$$

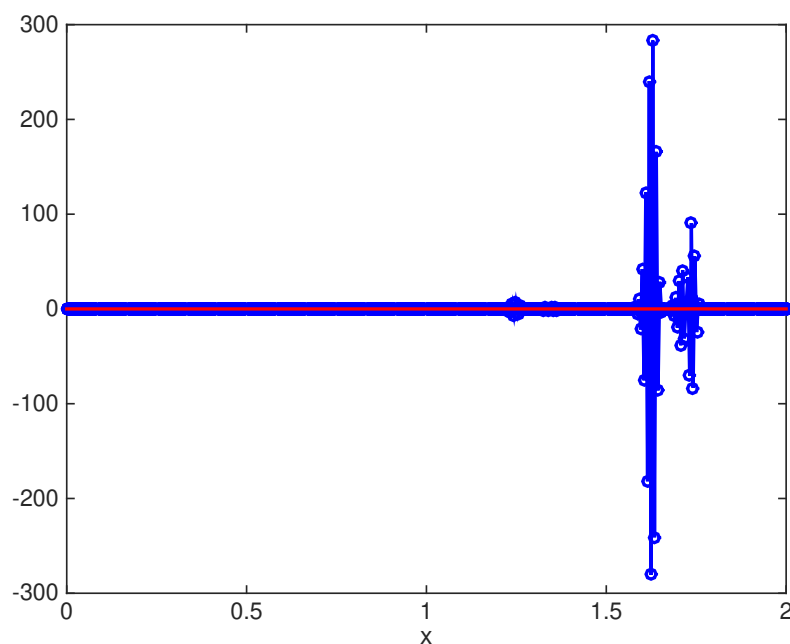


Για $\nu = 1/2$ η μέθοδος upwind δίνει: $U_i^{n+1} = (1 - 2 \cdot \frac{1}{2})U_i^n + 2 \cdot \frac{1}{2} U_{i-1}^n = U_{i-1}^n$.

Όμως, εδώ, οι χαρακτηριστικές έχουν κλίση $\frac{1}{2}$ και η κλίση της ευθείας που ενώνει τα U_i^{n+1} και U_{i-1}^n είναι ακριβώς $\nu = \frac{1}{2}$. Άρα η μέθοδός μας είναι ακριβής!

$$\nu = 0.5125, \quad a \cdot \nu = 1.025$$

$$N_x = 450, \quad N_t = 400$$



Παρατήρηση !!!

Θα δούμε γιατί η μέθοδος upwind μοιάζει να είναι ευσταθής, τουλάχιστον για κάποιες τιμές του ν , ενώ η μέθοδος

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} = 0, \quad (1)$$

είναι ασταθής, αν και οι δύο ικανοποιούν τη συνθήκη CFL.

Ας θεωρήσουμε πάλι τη μέθοδο upwind για $a > 0$

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} &= 0 \Rightarrow 0 = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{a}{2h} (2U_i^n - 2U_{i-1}^n) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{a}{2h} (2U_i^n - 2U_{i-1}^n + U_{i+1}^n - U_{i+1}^n) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{a}{2h} (2U_i^n - U_{i-1}^n - U_{i-1}^n + U_{i+1}^n - U_{i+1}^n) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} - \frac{ah}{2} \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

Άρα η μέθοδος upwind μπορεί να θεωρηθεί ως η μέθοδος (1) συν ένα όρο της μορφής

$$-\frac{ah}{2} \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \approx -\frac{ah}{2} u_{xx}.$$

Δηλαδή, μπορούμε να δούμε την upwind ως μια Μ.Π.Δ. για την παραβολική Μ.Δ.Ε.

$$u_t + au_x - \frac{ah}{2} u_{xx} = 0. \quad \text{Εξίσωση μεταφοράς - διάχυσης}$$

Επομένως, ο όρος $-\frac{ah}{2} \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$, μπορεί να θεωρηθεί ως ένας όρος «αριθμητικής διάχυσης» που σταθεροποιεί την ασταθή μέθοδο (1).

Από την άλλη μεριά αυτός ο όρος οδηγεί σε αριθμητική απόσβεση για τη μέθοδο upwind.

Θεώρημα

Για τη μέθοδο upwind ισχύει:

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} |u(t_n, x_i) - U_i^n| \leq \frac{T_f}{2} \left(\tau M_t + h a M_x \right),$$

αν $0 \leq |a| \nu \leq 1$.

Επιπλέον, η μέθοδος είναι ευσταθής αν και μόνον αν $0 \leq |a| \nu \leq 1$.

Η ιδέα της κατασκευής της μεθόδου Lax-Wendroff

$$u_t + a u_x = 0 \Rightarrow u_t = -a u_x$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (-a u_x)_t = -(a u_t)_x = -a (u_t)_x = -a (-a u_x)_x = a^2 u_{xx} \\ \Rightarrow u_{tt} &= a^2 u_{xx} \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε σε Taylor ως προς t :

$$\begin{aligned} u(t + \tau, x) &= u(t, x) + \tau u_t(t, x) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t, x) + \dots \\ \Rightarrow \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} &= u_t(t, x) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t, x) + \dots \\ \Rightarrow \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} &= -a u_x(t, x) + \frac{a^2 \tau}{2} u_{xx}(t, x) + \dots \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} &\approx -a \frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h} \\ &\quad + \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} \end{aligned}$$

Η μέθοδος Lax–Wendroff

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \quad 0 < t < T_f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} u(t, 0) = u_1(t), & \text{αν } a > 0 \\ u(t, 1) = u_1(t), & \text{αν } a < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T_f \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{T_f}{N_t}, \quad h = \frac{1}{N_x}$$

Θεωρούμε και πάλι χρονικό βήμα $\tau := T_f/N_t$, χωρικό βήμα h , και τα σημεία $(t_n, x_i) \in [0, T_f] \times [0, 1]$ με

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad \text{και} \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N_x$$

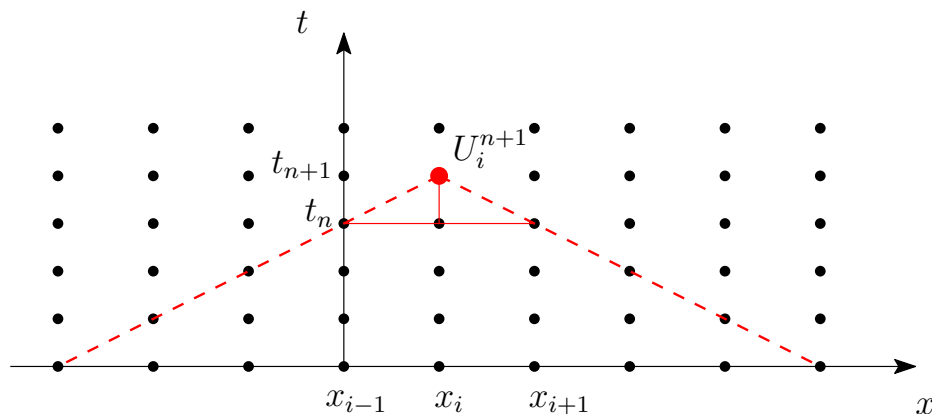
Τότε η μέθοδος Lax–Wendroff αποτελείται από τις:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} - \frac{a^2\tau}{2} \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} = 0$$

Η μέθοδος Lax–Wendroff

Θέτουμε (κατά τα γνωστά) $\nu = \frac{\tau}{h}$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με τ καταλήγουμε στην

$$U_i^{n+1} = \frac{a\nu}{2}(1 + a\nu)U_{i-1}^n + (1 - a^2\nu^2)U_i^n - \frac{a\nu}{2}(1 - a\nu)U_{i+1}^n \quad (2)$$



Εύκολα βλέπουμε ότι η συνθήκη **CFL** ικανοποιείται για $|a|\nu \leq 1$.

Ευστάθεια της μεθόδου Lax-Wendroff – 1

Έστω $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lax-Wendroff για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned}
 U_j^{n+1} &= \frac{a\nu}{2}(1+a\nu)U_{j-1}^n + (1-a^2\nu^2)U_j^n - \frac{a\nu}{2}(1-a\nu)U_{j+1}^n \\
 \Rightarrow \lambda^{n+1}e^{ikjh} &= \frac{a\nu}{2}(1+a\nu)\lambda^n e^{ik(j-1)h} \\
 &\quad + (1-a^2\nu^2)\lambda^n e^{ikjh} - \frac{a\nu}{2}(1-a\nu)\lambda^n e^{ik(j+1)h} \quad (\div \lambda^n e^{ikjh}) \\
 \Rightarrow \lambda &= \frac{a\nu}{2}(1+a\nu)e^{-ikh} + (1-a^2\nu^2) - \frac{a\nu}{2}(1-a\nu)e^{ikh} \\
 \Rightarrow \lambda &= 1 + \frac{a^2\nu^2}{2} \underbrace{(e^{-ikh} - 2 + e^{ikh})}_{-4\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)} - \frac{a\nu}{2} \underbrace{(e^{ikh} - e^{-ikh})}_{2i\sin(kh)} \\
 \Rightarrow \lambda &= 1 - 2a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) - ia\nu \sin(kh)
 \end{aligned}$$

Ευστάθεια της μεθόδου Lax-Wendroff – 2

Αρα

$$\begin{aligned}
 |\lambda|^2 &= \left(1 - 2a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right)^2 + \left(-a\nu \sin(kh)\right)^2 \\
 &= 1 - 4a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) + 4a^4\nu^4 \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) + a^2\nu^2 \sin^2(kh) \\
 &= 1 - 4a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) + 4a^4\nu^4 \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) + 4a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \cos^2\left(\frac{kh}{2}\right) \\
 &= 1 - 4a^2\nu^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \underbrace{\left(1 - \cos^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right)}_{\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)} + 4a^4\nu^4 \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) \\
 &= 1 - 4a^2\nu^2(1 - a^2\nu^2) \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 |\lambda| \leq 1 &\Leftrightarrow |\lambda|^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 4a^2\nu^2(1 - a^2\nu^2) \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow 4a^2\nu^2(1 - a^2\nu^2) \sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a^2\nu^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \nu^2 a^2 \leq 1 \Leftrightarrow \nu \leq \frac{1}{|a|}.
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Η μόνη διαφορά μεταξύ των μεθόδων upwind και Lax–Wendroff είναι ο συντελεστής του όρου της κεντρικής διαφοράς για την προσέγγιση της δευτέρας παραγώγου u_{xx} .

- Στην **upwind** είναι ίσος με: $\frac{|a|h}{2}$
- Στην **Lax–Wendroff** είναι ίσος με: $\frac{a^2\tau}{2}$

Όμως, αν $|a|\nu \leq 1$,

$$\frac{|a|h}{2} = \frac{|a|\tau}{2\nu} = \frac{a^2\tau}{2|a|\nu} \geq \frac{a^2\tau}{2}.$$

Άρα το ποσό της «αριθμητικής διάχυσης» που εισάγει η Lax–Wendroff είναι μικρότερο από εκείνο της upwind.

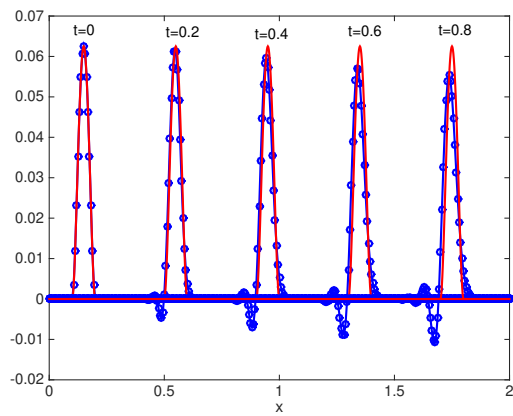
Παράδειγμα

$$\begin{aligned} u_t(t, x) + 2u_x(t, x) &= 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1], \ x \in [0, 2] \\ u(0, x) &= u_0(x) = \begin{cases} 10^4(0.1 - x)^2(0.2 - x)^2, & 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\ u(t, 0) &= 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ακριβής λύση: $u(t, x) = u_0(x - 2t)$

$$\nu = 0.4, \quad a \cdot \nu = 0.8 < 1$$

$$N_x = 320, \quad N_t = 400,$$



$$N_x = 800, \quad N_t = 1000.$$

