

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών – Μέρος 3ο

Δ. Μητσούδης

Μ.Π.Δ για Ελλειπτικά Προβλήματα

Η εξίσωση Poisson

Πρόβλημα Poisson

Έστω χωρίο του $\mathbb{R}^2$ (φραγμένο, ανοικτό, απλά συνεκτικό)

Αναζητούμε συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι Δ είναι ο τελεστής του Laplace, δηλ. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Αν $f = 0$, τότε η $\Delta u = 0$ λέγεται **εξίσωση του Laplace**.

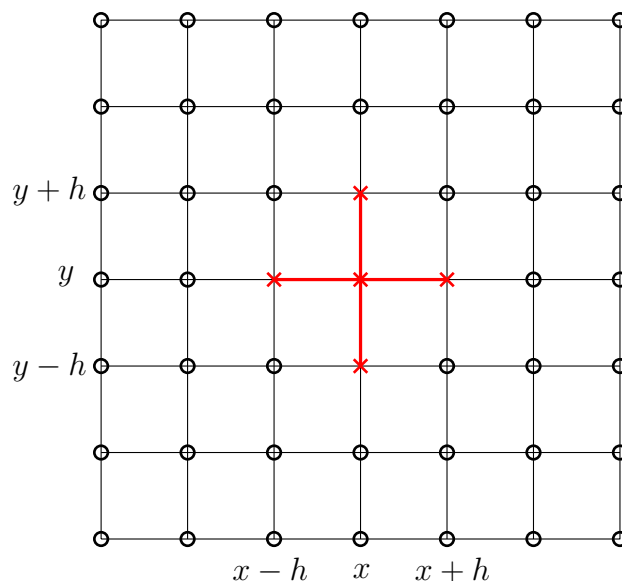
Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι Ω είναι το μοναδιαίο τετράγωνο $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ και θα αναζητήσουμε τη λύση πάνω σε διακριτά σημεία $(x_i, y_i) \in \Omega$, $i = 0, 1, 2, \dots, N_x + 1$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_y + 1$.

Τα σημεία (x_i, y_i) λέγονται **κόμβοι** και το σύνολο των κόμβων συνήθως λέγεται **πλέγμα**.

Διακριτοποίηση – 1 (Κατασκευή πλέγματος & κόμβων)

Έστω $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ και αναζητούμε λύση του (1). Θεωρούμε τον ίδιο αριθμό υποδιαστημάτων στους άξονες x και y , και παίρνοντας $h = 1/(N + 1)$ κατασκευάζουμε τα σημεία

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1, \quad y_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N + 1.$$



Διακριτοποίηση – 2 (Προσέγγιση παραγώγων)

Προσεγγίζουμε τις παραγώγους με κεντρικές διαφορές 2ης τάξης και έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\approx \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} \\ &\quad + \frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h) - 4u(x, y) \right).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Delta u(x_i, y_j) &= f(x_i, y_j) \Rightarrow \\ \frac{1}{h^2} \left(u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1}) - 4u(x_i, y_j) \right) &\approx f(x_i, y_j).\end{aligned}$$

Το σχήμα των πέντε σημείων

Επομένως, αν συμβολίσουμε $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ και $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, καταλήγουμε στο λεγόμενο **σχήμα των πέντε σημείων**:

$$U_{i-1,j} + U_{i+1,j} - 4U_{ij} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} = h^2 f_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (2)$$

Η (2) εφοδιάζεται με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες:

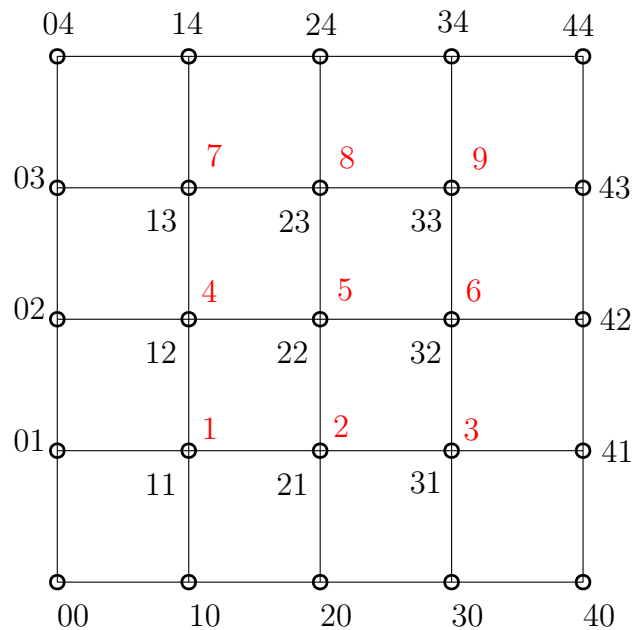
$$U_{0,j} = U_{N+1,j} = U_{i,0} = U_{i,N+1} = 0, \quad (3)$$

για κάθε $i, j = 0, \dots, N+1$.

Η (2) με τις συνθήκες (3) οδηγούν σε ένα **αλγεβρικό σύστημα N^2 εξισώσεων με N^2 αγνώστους** (τις τιμές U_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$) της μορφής $AU = F$.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να διατάξουμε κάπως τους αγνώστους.

Row-wise ordering (Διάταξη κατά γραμμές) – Παράδειγμα



$$\begin{array}{ll}
1 & i = 1, j = 1: \quad -4U_{11} + U_{21} + U_{12} = h^2 f(x_1, y_1) \\
2 & i = 2, j = 1: \quad U_{11} - 4U_{21} + U_{31} + U_{22} = h^2 f(x_2, y_1) \\
3 & i = 3, j = 1: \quad U_{21} - 4U_{31} + U_{32} = h^2 f(x_3, y_1) \\
4 & i = 1, j = 2: \quad U_{11} - 4U_{12} + U_{22} + U_{13} = h^2 f(x_1, y_2) \\
5 & i = 2, j = 2: \quad U_{21} + U_{12} - 4U_{22} + U_{32} + U_{23} = h^2 f(x_2, y_2) \\
6 & i = 3, j = 2: \quad U_{31} + U_{22} - 4U_{32} + U_{33} = h^2 f(x_3, y_2) \\
7 & i = 1, j = 3: \quad U_{12} - 4U_{13} + U_{23} = h^2 f(x_1, y_3) \\
8 & i = 2, j = 3: \quad U_{22} + U_{13} - 4U_{23} + U_{33} = h^2 f(x_2, y_3) \\
9 & i = 3, j = 3: \quad U_{32} + U_{23} - 4U_{33} = h^2 f(x_3, y_3)
\end{array}$$

Row-wise ordering (Διάταξη κατά γραμμές) – Παράδειγμα

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	-4	1		1						U_{11}
2	1	-4	1		1					U_{21}
3		1	-4			1				U_{31}
4	1			-4	1		1			U_{12}
5		1		1	-4	1		1		U_{22}
6			1		1	-4			1	U_{32}
7				1			-4	1		U_{13}
8					1		1	-4	1	U_{23}
9						1		1	-4	U_{33}

Row-wise ordering (Διάταξη κατά γραμμές)

Επομένως, αν

$$U = (U_{11}, U_{21}, \dots, U_{N1}, U_{12}, U_{22}, \dots, U_{N2}, \dots, U_{1N}, U_{2N}, \dots, U_{NN})^T$$

και

$$F = (f_{11}, f_{21}, \dots, f_{N1}, f_{12}, f_{22}, \dots, f_{N2}, \dots, f_{1N}, f_{2N}, \dots, f_{NN})^T$$

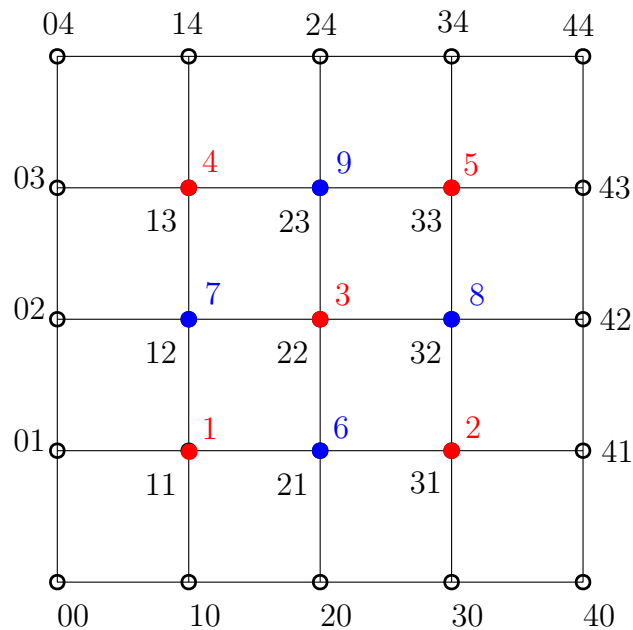
καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$AU = F,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & I & B & I \\ & & & I & B \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2}, \text{ και } B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

Red-black ordering – Παράδειγμα



Red-black ordering – Παράδειγμα

- 1 $i = 1, j = 1 : -4U_{11} + U_{21} + U_{12} = h^2 f(x_1, y_1)$
- 2 $i = 3, j = 1 : -4U_{31} + U_{21} + U_{32} = h^2 f(x_3, y_1)$
- 3 $i = 2, j = 2 : -4U_{22} + U_{21} + U_{12} + U_{32} + U_{23} = h^2 f(x_2, y_2)$
- 4 $i = 1, j = 3 : -4U_{13} + U_{12} + U_{23} = h^2 f(x_1, y_3)$
- 5 $i = 3, j = 3 : -4U_{33} + U_{32} + U_{23} = h^2 f(x_3, y_3)$
- 6 $i = 2, j = 1 : U_{11} + U_{31} + U_{22} - 4U_{21} = h^2 f(x_2, y_1)$
- 7 $i = 1, j = 2 : U_{11} + U_{22} + U_{13} - 4U_{12} = h^2 f(x_1, y_2)$
- 8 $i = 3, j = 2 : U_{31} + U_{22} + U_{33} - 4U_{32} = h^2 f(x_3, y_2)$
- 9 $i = 2, j = 3 : U_{22} + U_{13} + U_{33} - 4U_{23} = h^2 f(x_2, y_3)$

Red-black ordering – Παράδειγμα

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	-4					1	1			U_{11}
2		-4				1		1		U_{31}
3			-4			1	1	1	1	U_{22}
4				-4			1		1	U_{13}
5					-4			1	1	U_{33}
6	1	1	1			-4				U_{21}
7	1		1	1			-4			U_{12}
8		1	1		1			-4		U_{32}
9			1	1	1				-4	U_{23}

Σφάλμα συνέπειας της μεθόδου

Ορίζουμε το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου:

$$T_{i,j} := \frac{1}{h^2} \left(u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) \right) - f(x_i, y_j), \quad \text{για } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Δηλαδή έχουμε αντικαταστήσει την ακριβή λύση στο αριθμητικό μας σχήμα.

Λήμμα

Για το σχήμα των 5 σημείων έχουμε ότι:

$$|T_{i,j}| \leq \frac{h^2}{12} (M_{xxxx} + M_{yyyy}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

όπου

$$M_{xxxx} = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |u_{xxxx}(x, y)|, \quad M_{yyyy} = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |u_{yyyy}(x, y)|,$$

και $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Άσκηση:

Αποδείξτε την παραπάνω εκτίμηση για το σφάλμα συνέπειας.

Σκιαγράφηση της απόδειξης

$$\begin{aligned}
 T_{i,j} &:= \frac{1}{h^2} \left(u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) \right) \\
 &\quad - f(x_i, y_j) \\
 &= \frac{1}{h^2} \left(u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) + u(x_i, y_j + h) + u(x_i, y_j - h) - 4u(x_i, y_j) \right) \\
 &\quad - f(x_i, y_j) \\
 &\stackrel{\text{Taylor}}{=} u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{24} (u_{xxxx}(\xi_1, y_j) + u_{xxxx}(\zeta_1, y_j)) \\
 &\quad + u_{yy}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{24} (u_{yyyy}(x_i, \xi_2) + u_{yyyy}(x_i, \zeta_2)) - f(x_i, y_j) \\
 &= \underbrace{u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) - f(x_i, y_j)}_{=\Delta u(x_i, y_j) - f(x_i, y_j) = 0} \\
 &\quad + \frac{h^2}{24} (u_{xxxx}(\xi_1, y_j) + u_{xxxx}(\zeta_1, y_j)) + \frac{h^2}{24} (u_{yyyy}(x_i, \xi_2) + u_{yyyy}(x_i, \zeta_2)) \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

Σφάλμα της μεθόδου

Θεώρημα

Έστω ότι το Ω και το πλέγμα είναι όπως πριν, και ότι η f είναι αρκούντως ομαλή. Τότε για το σχήμα των 5-σημείων έχουμε ότι:

$$|U_{ij} - u(x_i, y_j)| \leq C h^2, \quad \text{για κάθε } i, j = 1, \dots, n.$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = 0 & \text{για κάθε } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

όπου

$$f(x, y) = 2(1 - 4\pi^2) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y} - 4\pi \sin(2\pi(x - y)) e^{x-y}$$

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{x-y} \quad (\text{Η ακριβής λύση})$$

$N = 40$

