

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών – Μέρος 2ο

Δ. Μητσούδης

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (Μ.Π.Δ) για Παραβολικά Προβλήματα

Η εξίσωση της Θερμότητας

Πρόβλημα Αρχικών/Συνοριακών Τιμών για την εξίσωση της Θερμότητας

Αναζητούμε $u : [0, T_f] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους τ.ω.

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f], x \in [a, b]$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]$$

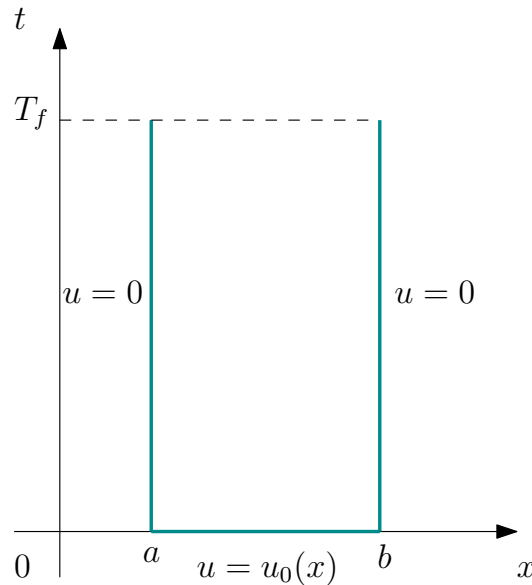
$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f].$$

Αρχική Συνθήκη

Συνοριακές Συνθήκες Dirichlet

t : χρονική παράμετρος

x : χωρική παράμετρος



Διακριτοποίηση – 1 (Κατασκευή πλέγματος & κόμβων)

Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ σε $N_x + 1$ υποδιαστήματα και έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, T_f]$ σε N_t υποδιαστήματα

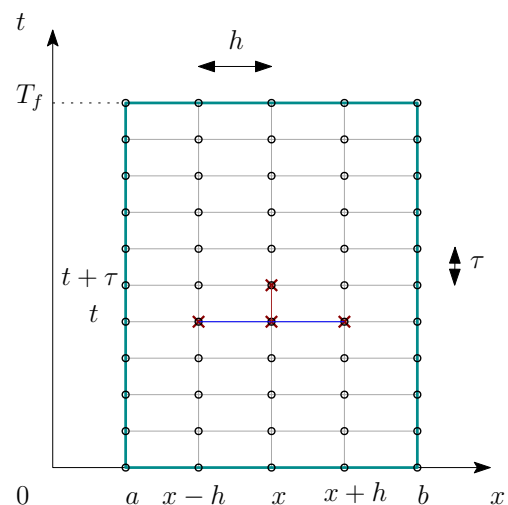
Έστω $h = \frac{b-a}{N_x+1}$ και $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

Κόμβοι στη χωρική διάσταση:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N_x + 1.$$

Κόμβοι στη χρονική διάσταση:

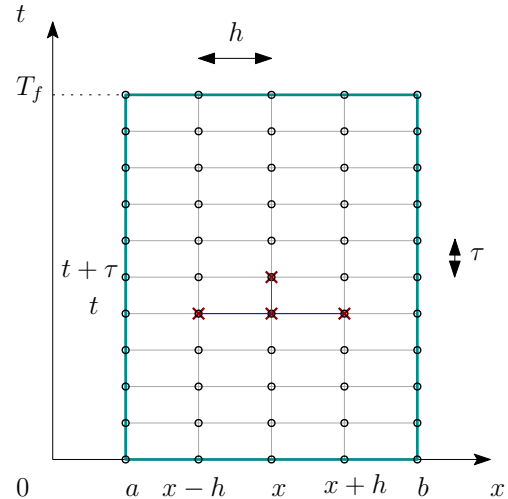
$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t.$$



Διακριτοποίηση – 2 (Προσέγγιση παραγώγων)

Προσεγγίζουμε την παράγωγο $u_t(t, x)$ με προς τα εμπρός διαφορά:

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau}.$$



Προσεγγίζουμε την παράγωγο $u_{xx}(t, x)$ με κεντρική διαφορά 2ης τάξης:

$$u_{xx}(t, x) \approx \frac{u(t, x - h) - 2u(t, x) + u(t, x + h))}{h^2}.$$

Διακριτοποίηση – 3

Επομένως προσεγγίζουμε τη μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) στο σημείο (t_n, x_i)

$$u_t(t_n, x_i) - u_{xx}(t_n, x_i) = 0$$

με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$\frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i-1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i+1}))}{h^2} \approx 0.$$

Συμβολίζουμε με U_i^n την προσέγγιση της ακριβούς λύσης στο σημείο (t_n, x_i) , δηλαδή $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$. Έτσι οδηγούμαστε στο ακόλουθο αριθμητικό σχήμα:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} &= 0 \\ \Rightarrow U_i^{n+1} - U_i^n - \frac{\tau}{h^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) &= 0, \end{aligned}$$

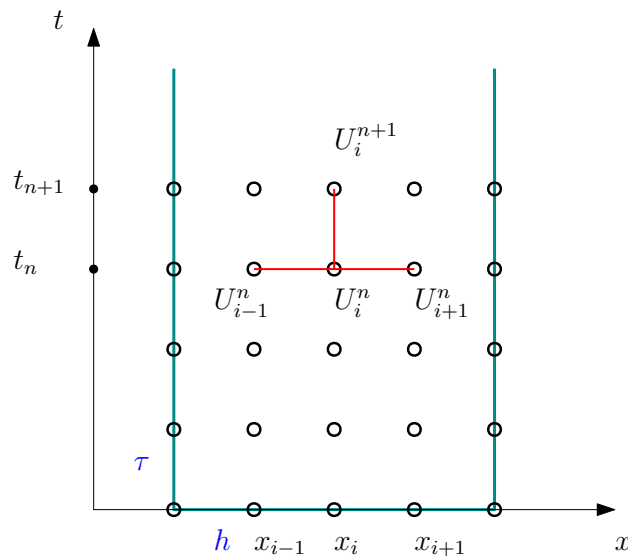
όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ και $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Άμεση μέθοδος του Euler

Θέτουμε $\mu := \frac{\tau}{h^2}$ (αριθμός Courant), οπότε καταλήγουμε στην **άμεση μέθοδο του Euler**:

$$U_i^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (1 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n,$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ και $i = 1, 2, \dots, N_x$.



Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Παρατηρήστε ότι λόγω της αρχικής συνθήκης παίρνουμε:

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x.$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε:

$$U_0^n = 0 \quad \text{και} \quad U_{N_x+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t.$$

Άμεση μέθοδος του Euler

Τελικά, καταλήγουμε στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών:

$$U_i^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (1 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n, \quad (1)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (2)$$

$$U_0^n = 0 \quad \text{και} \quad U_{N_x+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t. \quad (3)$$

Η μέθοδος αυτή υλοποιείται πολύ εύκολα αφού για κάθε χρονικό βήμα απαιτείται να γνωρίζουμε μόνον τις τιμές στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Σε αυτό το χαρακτηριστικό οφείλεται ο όρος **άμεση** μέθοδος.

Π.χ., για $n = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \mu U_{i-1}^0 + (1 - 2\mu) U_i^0 + \mu U_{i+1}^0, \quad i = 1, 2, \dots, N_x \\ &= \mu u_0(x_{i-1}) + (1 - 2\mu) u_0(x_i) + \mu u_0(x_{i+1}) \quad \leftarrow \text{γνωστές τιμές} \end{aligned}$$

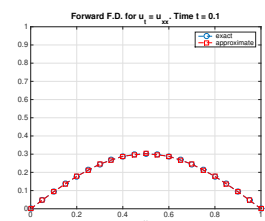
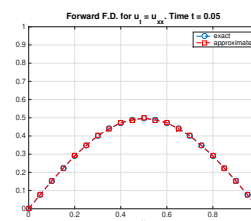
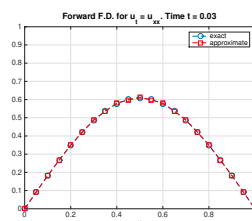
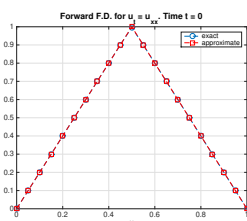
Παράδειγμα

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1], \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}, \quad (\text{Αρχική Συνθήκη})$$

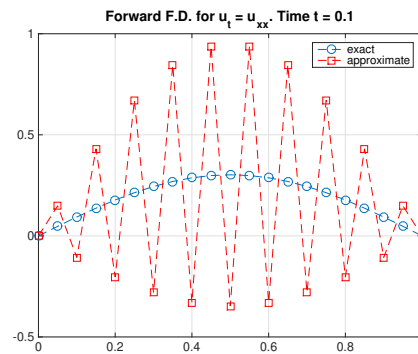
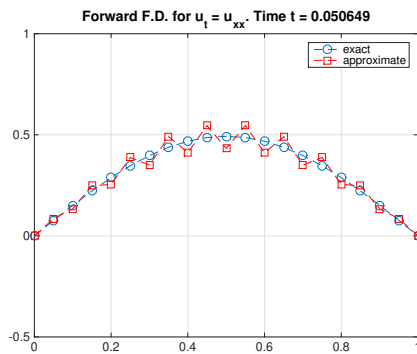
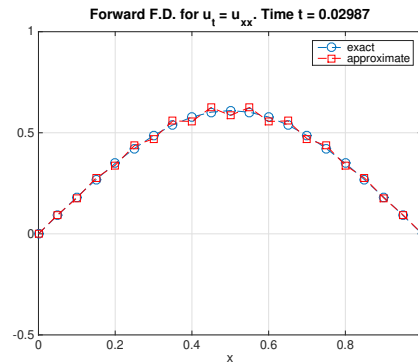
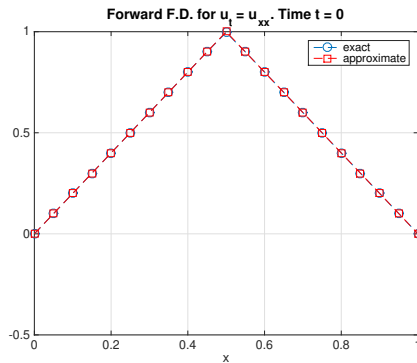
$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1]. \quad (\text{Συνοριακές Συνθήκες Dirichlet})$$

$$N_x = 19, N_t = 800, \quad (h = \frac{1}{20}, \tau = \frac{1}{800}) \quad \mu = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}.$$



Παράδειγμα (συνέχεια)

$$N_x = 19, N_t = 770, \quad (h = \frac{1}{20}, \tau = \frac{1}{770}) \quad \mu = 0.5195.$$



Δ.Α. Μητσούδης

Αριθμητική επίλυση Δ.Ε.

11 / 47

Σφάλμα συνέπειας της άμεσης μεθόδου του Euler

Ορίζουμε και πάλι το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου:

$$T_i^n := \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{h^2}, \quad (4)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ και $i = 1, 2, \dots, N_x$. Δηλαδή έχουμε αντικαταστήσει την ακριβή λύση στο αριθμητικό μας σχήμα.

Λήμμα

Για την άμεση μέθοδο του Euler έχουμε ότι:

$$|T_i^n| \leq \frac{\tau}{2} M_{tt} + \frac{h^2}{12} M_{xxx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

όπου

$$M_{tt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t, x)|, \quad M_{xxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxx}(t, x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Σφάλμα της άμεσης μεθόδου του Euler

Θεώρημα

Θεωρούμε την άμεση μέθοδο του Euler, όπως περιγράφεται από τις (1)–(3), και έστω u η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών.

Έστω ότι ο αριθμός Courant είναι τέτοιος ώστε $0 \leq \mu \leq 1/2$, για κάθε τ και h . Τότε

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} |u(t_n, x_i) - U_i^n| \leq T_f \left(\frac{\tau}{2} M_{tt} + \frac{h^2}{12} M_{xxxx} \right), \quad \text{για } n = 1, \dots, N_t,$$

όπου

$$M_{tt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t, x)|, \quad M_{xxxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Παρατήρηση

Παρατήρηση: Το προηγούμενο σφάλμα αποδεικνύεται υπό την προϋπόθεση ότι

$$\mu \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Άρα

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} |u(t_n, x_i) - U_i^n| \leq \frac{T_f}{4} \left(M_t + \frac{1}{3} M_x \right) h^2.$$

Αφού πρέπει $\mu \leq \frac{1}{2}$ το χρονικό βήμα θα πρέπει να μικραίνει συνεχώς, και μάλιστα γρήγορα (τετραγωνικά με το h), καθώς το $h \rightarrow 0$.

Υπενθύμιση

Αν $L > 0$ και $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που παρουσιάζει το πολύ πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών στο διάστημα $[-L, L]$, τότε ορίζουμε ως **ανάπτυγμα Fourier** της f τη σειρά:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

και

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τώρα, βάσει του **τύπου του Euler**: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το ανάπτυγμα της f σε σειρά Fourier ως εξής:

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L}, \quad \text{όπου} \quad c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-im\pi x/L} dx.$$

(Θα έχουμε ότι: $a_m = c_m + c_{-m}$ και $b_m = i(c_m - c_{-m})$.)

Συναρτήσεις της μορφής $e^{im\pi x/L}$ αναφέρονται συνήθως ως **επίπεδα κύματα**.

Ανάλυση ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler - 1

Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε την εξίσωση της θερμότητας **σε όλη την ευθεία**, δηλαδή το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= u_{xx}(t, x), & \text{για κάθε } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= f(x), & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{Αρχική συνθήκη})$$

Για το πρόβλημα αυτό γνωρίζουμε από τη θεωρία των ΜΔΕ, ότι η λύση παραμένει **φραγμένη**, δηλαδή $|u(t, x)| \leq C$, καθώς $t \rightarrow \infty$, για κάθε αρχική συνθήκη f τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < +\infty$.

Τώρα, θεωρούμε ένα πλέγμα της μορφής (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε πώς διαδίδεται η πληροφορία σε κάθε χρονικό βήμα ξεκινώντας από μια αρχική συνθήκη της μορφής $u(0, x) = e^{ikx}$. Δηλαδή, η αρχική τιμή στον κόμβο $(0, x_j)$ είναι:

$$U_j^0 = e^{ikx_j} = e^{ikjh}.$$

Ανάλυση ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler - 2

Εφαρμόζουμε την άμεση μέθοδο του Euler, για να κάνουμε ένα βήμα στο χρόνο:

$$\begin{aligned} U_j^1 &= \mu U_{j-1}^0 + (1 - 2\mu)U_j^0 + \mu U_{j+1}^0 = \mu e^{ik(j-1)h} + (1 - 2\mu)e^{ikjh} + \mu e^{ik(j+1)h} \\ &= \left(\mu e^{-ikh} + 1 - 2\mu + \mu e^{ikh} \right) e^{ikjh} = \left[1 + \mu \left(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2 \right) \right] e^{ikjh} \\ &= \left[1 + \mu \left(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2 \right) \right] U_j^0. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} e^{ikh} + e^{-ikh} - 2 &= \cos kh + i \sin kh + \cos kh - i \sin kh - 2 = 2 \cos kh - 2 \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{kh}{2} \right) - 2 = -4 \sin^2 \frac{kh}{2}. \end{aligned}$$

(Η ισότητα $(*)$ προκύπτει από τον τριγωνομετρικό τύπο: $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.)

Ανάλυση ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler - 3

Άρα δείξαμε ότι:

$$U_j^1 = \left(1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \right) U_j^0,$$

δηλαδή στο 1ο χρονικό βήμα η προσεγγιστική λύση πολλαπλασιάζεται επί τον όρο:

$$\lambda = \lambda(k) = 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Εντελώς ανάλογα, στο 2ο χρονικό βήμα έχουμε: $U_j^2 = \lambda^2 e^{ikjh}$.

Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε ότι:

$$U_j^n = \lambda^n e^{ikjh}.$$

Ανάλυση ευστάθειας της άμεσης μεθόδου του Euler - 4

Παίρνοντας το μέτρο, και επειδή $|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$, έχουμε:

$$|U_j^n| = |\lambda^n| |e^{ikjh}| = |\lambda^n| \cdot 1 = |\lambda|^n.$$

Άρα για να παραμένουν οι προσεγγίσεις φραγμένες καθώς $n \rightarrow \infty$ (κατ' αναλογία με το συνεχές πρόβλημα) θα πρέπει:

$$\begin{aligned} |\lambda| \leq 1 &\Leftrightarrow \left| 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}_{\in [0,1]} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η άμεση μέθοδος του Euler είναι **ευσταθής** αν και μόνον αν ο αριθμός Courant ικανοποιεί τη σχέση: $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$.

Η μελέτη ευστάθειας με χρήση ανάλυσης Fourier είναι γνωστή ως **ανάλυση von Neumann**.

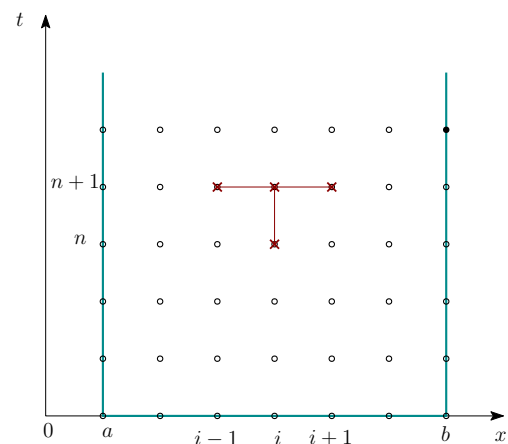
Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

Θεωρούμε και πάλι ομοιόμορφες διαμερίσεις των $[0, T_f]$ και $[a, b]$.

$$\tau = \frac{T_f}{N_t}, \quad h = \frac{b-a}{N_x+1}, \quad t_i = i\tau, \quad i = 0, 1, \dots, N_t, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N_x + 1.$$

Τώρα, προσεγγίζουμε την παράγωγο $u_t(t, x)$ με προς τα πίσω διαφορά:

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t, x) - u(t - \tau, x)}{\tau}.$$



Προσεγγίζουμε την παράγωγο $u_{xx}(t, x)$ (όπως πριν) με κεντρική διαφορά 2ης τάξης:

$$u_{xx}(t, x) \approx \frac{u(t, x-h) - 2u(t, x) + u(t, x+h)}{h^2}.$$

Άρα, τώρα προσεγγίζουμε τη ΜΔΕ στο σημείο (t_{n+1}, x_i)

$$u_t(t_{n+1}, x_i) - u_{xx}(t_{n+1}, x_i) = 0$$

με το εξής σχήμα:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} &= 0 \\ \Rightarrow U_i^{n+1} - U_i^n - \underbrace{\frac{\tau}{h^2}}_{\mu} (U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, i = 1, 2, \dots, N_x$ και $\mu = \frac{\tau}{h^2}$ είναι και πάλι ο αριθμός Courant.

Τελικά, καταλήγουμε στη μέθοδο:

$$-\mu U_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\mu) U_i^{n+1} - \mu U_{i+1}^{n+1} = U_i^n, \quad (5)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (6)$$

$$U_0^n = 0 \quad \text{και} \quad U_{N_x+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t. \quad (7)$$

Π.χ., για $n = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} i = 1 : & \quad -\mu \overbrace{U_0^1}^{=0} + (1 + 2\mu) U_1^1 - \mu U_2^1 = U_1^0 \\ i = 2 : & \quad -\mu U_1^1 + (1 + 2\mu) U_2^1 - \mu U_3^1 = U_2^0 \\ & \quad \vdots \\ i = N_x : & \quad -\mu U_{N_x-1}^1 + (1 + 2\mu) U_{N_x}^1 - \mu \underbrace{U_{N_x+1}^1}_{=0} = U_{N_x}^0 \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα N_x εξισώσεων με N_x αγνώστους.

Άρα σε κάθε χρονικό βήμα $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$ για να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις $U_1^{n+1}, \dots, U_{N_x}^{n+1}$ θα πρέπει να λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$A U^{(n+1)} = U^{(n)} :$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1+2\mu & -\mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\mu & 1+2\mu & -\mu \\ & & & -\mu & 1+2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^{n+1} \\ U_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^n \\ U_{N_x}^n \end{pmatrix}$$

(Αυτό δικαιολογεί τον όρο πεπλεγμένη.)

Σφάλμα συνέπειας της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler

Λήμμα

Για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler έχουμε ότι:

$$|T_i^{n+1}| \leq \frac{\tau}{2} M_{tt} + \frac{h^2}{12} M_{xxxx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

όπου

$$M_{tt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t,x)|, \quad M_{xxxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t,x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Θεώρημα

Για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler έχουμε και πάλι ότι είναι μια μέθοδος *πρώτης τάξης ως προς τ* και *δεύτερης τάξης ως προς h* (για κάθε $\mu \geq 0$).

Ευστάθεια της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler – 1

Θεωρούμε και πάλι το αντίστοιχο Π.Α.Τ. (δηλαδή για $x \in \mathbb{R}$) και το πλέγμα (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, θα έχουμε στο επόμενο χρονικό βήμα:

$$\begin{aligned} & -\mu U_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\mu)U_j^{n+1} - \mu U_{j-1}^{n+1} = U_j^n \\ \Rightarrow & -\mu \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} + (1 + 2\mu)\lambda^{n+1} e^{ikjh} - \mu \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h} = \lambda^n e^{ikjh} \quad \div (\lambda^n e^{ikjh}) \\ \Rightarrow & -\mu \lambda e^{ikh} + (1 + 2\mu)\lambda - \mu \lambda e^{-ikh} = 1 \Rightarrow \lambda - \mu \lambda \underbrace{(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2)}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}} = 1 \\ \Rightarrow & \lambda + 4\mu \lambda \sin^2 \frac{kh}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 + 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}. \end{aligned}$$

Άρα $|\lambda| \leq 1$, για κάθε $\mu \geq 0$ (αφού $0 \leq \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 1$).

Συνεπώς, οι λύσεις παραμένουν φραγμένες για κάθε $\mu \geq 0$, άρα *η πεπλεγμένη Euler είναι ευσταθής για κάθε $\mu \geq 0$* .

Παρατηρήσεις

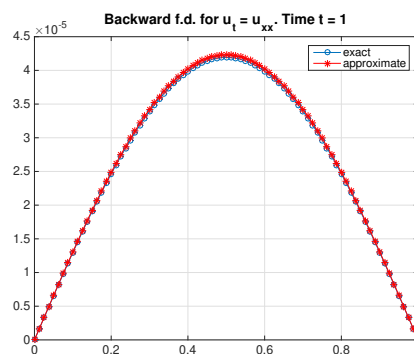
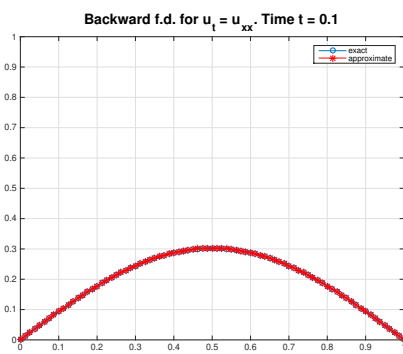
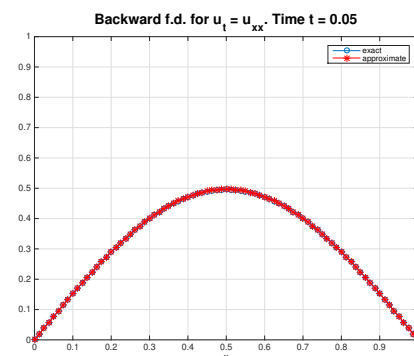
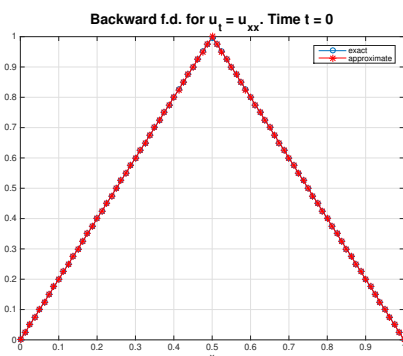
Δείξαμε ότι η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι ευσταθής για κάθε $\mu \geq 0$.

Αυτό φυσικά μας επιτρέπει να επιλέγουμε μεγαλύτερα χρονικά βήματα σε σχέση με την άμεση μέθοδο. Βεβαίως, παίρνοντας μεγαλύτερα χρονικά βήματα μπορεί να οδηγηθούμε σε πιο αργή σύγκλιση.

Στην πράξη, συχνά, μια καλή επιλογή είναι να πάρει κανείς τα h, τ έτσι ώστε $\mu = 1$.

Παράδειγμα

$$N_x = 79, N_t = 6400, \quad \left(h = \frac{1}{80}, \tau = \frac{1}{6400}\right) \quad \mu = 1.0.$$



Η μέθοδος των Crank–Nicolson

Θεωρούμε και πάλι ομοιόμορφες διαμερίσεις των $[0, T_f]$ και $[a, b]$.

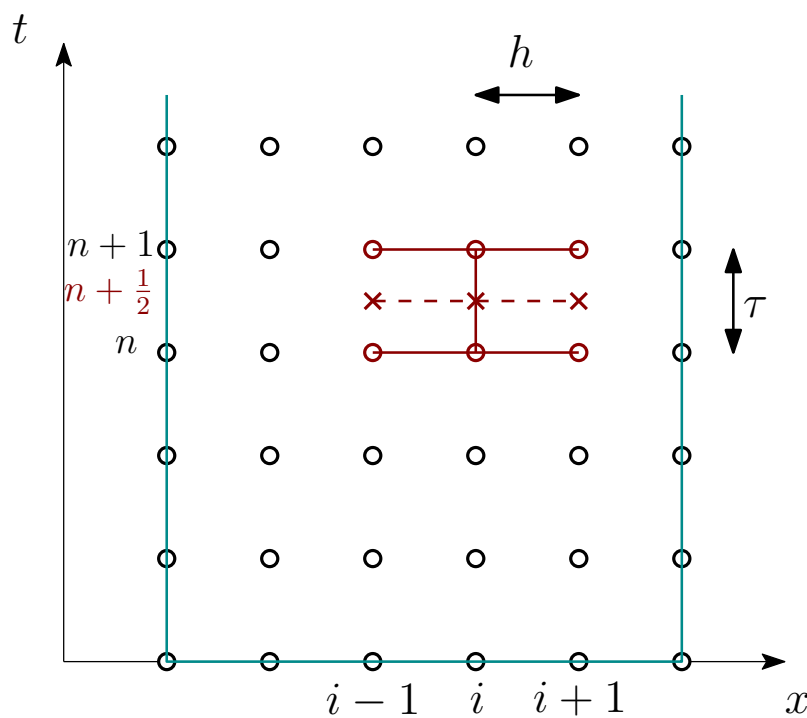
$$\tau = \frac{T_f}{N_t}, \quad h = \frac{b - a}{N_x + 1}, \quad t_i = i\tau, \quad i = 0, 1, \dots, N_t, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N_x + 1.$$

Αν $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$, ορίζουμε τη μέθοδο Crank–Nicolson από τις εξισώσεις:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad (8)$$

για $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Μπορούμε να δούμε τη μέθοδο Crank–Nicolson ως τον «μέσο όρο» της άμεσης και της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.



Πολλαπλασιάζουμε την (8) επί 2τ και έχουμε:

$$2U_i^{n+1} - 2U_i^n = \frac{\tau}{h^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + \frac{\tau}{h^2}(U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}).$$

Άρα:

$$-\mu U_{i-1}^{n+1} + (2 + 2\mu) U_i^{n+1} - \mu U_{i+1}^{n+1} = \mu U_{i-1}^n + (2 - 2\mu) U_i^n + \mu U_{i+1}^n, \quad (9)$$

για $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$, όπου $\mu = \frac{\tau}{h^2}$ είναι ο αριθμός Courant.

Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (10)$$

$$U_0^n = 0 \quad \text{και} \quad U_{N_x+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t. \quad (11)$$

Οι (9)–(11) μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 2+2\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 2+2\mu & -\mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\mu & 2+2\mu & -\mu \\ & & & & -\mu & 2+2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^{n+1} \\ U_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\mu & \mu & & & \\ \mu & 2-2\mu & \mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 2-2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 2-2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^n \\ U_{N_x}^n \end{pmatrix}$$

Η μέθοδος Crank–Nicolson είναι επίσης πεπλεγμένη μιας και σε κάθε χρονικό βήμα πρέπει να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα: $A U^{(n+1)} = f$, όπου $f = B U^{(n)}$.

Σφάλμα συνέπειας της μεθόδου Crank-Nicolson

Θεωρούμε το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου:

$$T_i^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u(t_{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t_{n+1}, x_i) + u(t_{n+1}, x_{i-1}))}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{h^2}.$$

Λήμμα

Για την μέθοδο Crank-Nicolson έχουμε ότι:

$$|T_i^{n+\frac{1}{2}}| \leq \frac{\tau^2}{12} M_{ttt} + \frac{h^2}{12} M_{xxxx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (12)$$

όπου

$$M_{ttt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{ttt}(t, x)|, \quad M_{xxxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t, x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Σφάλμα της μεθόδου Crank-Nicolson

Δεν θα κάνουμε την ανάλυση σφάλματος, αλλά από την (12) αρχίζουμε να υποψιαζόμαστε ότι η μέθοδος είναι 2ης τάξης και ως προς h και ως προς τ .

Πράγματι:

Θεώρημα

Για την μέθοδο των Crank-Nicolson έχουμε ότι είναι μια μέθοδος δεύτερης τάξης και ως προς τ και ως προς h .

Ευστάθεια της μεθόδου Crank-Nicolson

Παίρνουμε και πάλι το αντίστοιχο Π.Α.Τ. σ' ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών και θεωρούμε το πλέγμα (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε την Crank-Nicolson για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned} & -\mu U_{j+1}^{n+1} + (2 + 2\mu)U_j^{n+1} - \mu U_{j-1}^{n+1} = \mu U_{j+1}^n + (2 - 2\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n \\ \Rightarrow & -\mu \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} + (2 + 2\mu)\lambda^{n+1} e^{ikjh} - \mu \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h} \\ & = \mu \lambda^n e^{ik(j+1)h} + (2 - 2\mu)\lambda^n e^{ikjh} + \mu \lambda^n e^{ik(j-1)h} \quad \div (\lambda^n e^{ikjh}) \\ \Rightarrow & -\mu \lambda e^{ikh} + (2 + 2\mu)\lambda - \mu \lambda e^{-ikh} = \mu e^{ikh} + (2 - 2\mu) + \mu e^{-ikh} \\ \Rightarrow & 2\lambda - \mu \lambda (\underbrace{e^{ikh} + e^{-ikh} - 2}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}}) = 2 + \mu (\underbrace{e^{ikh} + e^{-ikh} - 2}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}}) \\ \Rightarrow & 2\lambda + 4\mu \lambda \sin^2 \frac{kh}{2} = 2 - 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1 - 2\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + 2\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}. \end{aligned}$$

Άρα $|\lambda| \leq 1$, για κάθε $\mu \geq 0$. Συνεπώς, οι λύσεις παραμένουν φραγμένες για κάθε $\mu \geq 0$, άρα η Crank-Nicolson είναι ευσταθής για κάθε $\mu \geq 0$.

Παρατηρήσεις

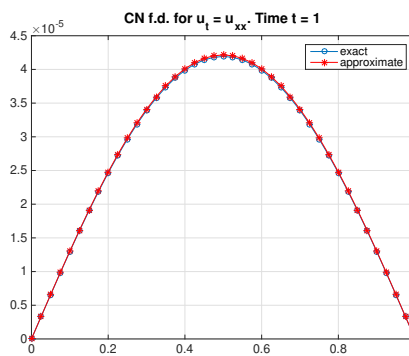
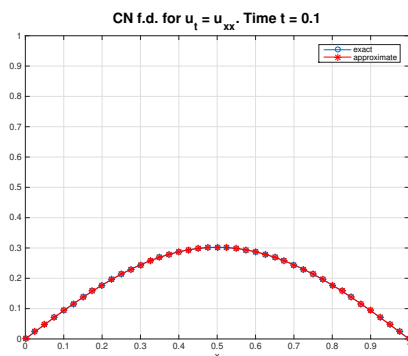
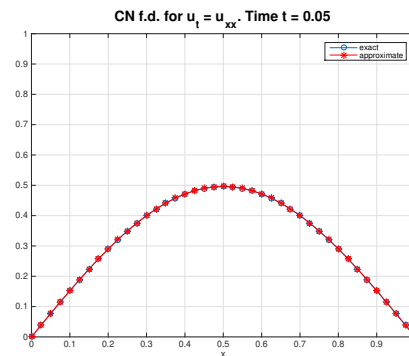
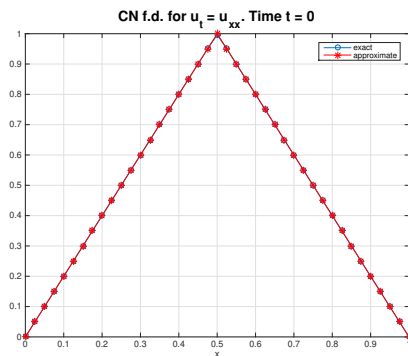
Είδαμε ότι η μέθοδος Crank-Nicolson είναι ευσταθής για κάθε $\mu \geq 0$.

Και πάλι, αυτό μας επιτρέπει να επιλέγουμε μεγαλύτερα χρονικά βήματα σε σχέση με την άμεση μέθοδο, αλλά και πάλι μικρότερες τιμές του μ μας δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.

Στην πράξη, συχνά, επιλέγουμε τα h, τ έτσι ώστε $\mu = 1$.

Παράδειγμα

$$N_x = 39, N_t = 800, \quad \left(h = \frac{1}{40}, \tau = \frac{1}{800}\right) \quad \mu = 2.0.$$



Δ.Α. Μητσούδης

Αριθμητική επίλυση Δ.Ε.

37 / 47

Επεκτάσεις για προβλήματα με μεταβλητούς συντελεστές

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Αναζητούμε $u : [0, T_f] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους τ.ω.

$$u_t(t, x) = a(t, x)u_{xx}(t, x) - c(t, x)u(t, x), \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f], x \in [a, b] \quad (13)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \quad (14)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, T_f]. \quad (15)$$

Οι συναρτήσεις $a, c : [0, T_f] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $a(t, x) > 0, c(t, x) \geq 0$ για κάθε $(t, x) \in [0, T_f] \times [a, b]$.

Άμεσες μέθοδοι

Θα δούμε μια επέκταση της άμεσης μεθόδου του Euler.

Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ σε $N_x + 1$ υποδιαστήματα με βήμα $h = \frac{b-a}{N_x+1}$ και έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, T_f]$ σε N_t υποδιαστήματα με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

Άρα οι κόμβοι στη χωρική διάσταση είναι: $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N_x + 1$ και στη χρονική διάσταση είναι: $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$.

Έστω και πάλι: $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$.

Προσεγγίζουμε (και πάλι) την παράγωγο $u_t(t, x)$ με προς τα εμπρός διαφορά και την παράγωγο $u_{xx}(t, x)$ με κεντρική διαφορά 2ης τάξης, οπότε καταλήγουμε στο αριθμητικό σχήμα:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = a_i^n \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} - c_i^n U_i^n,$$

για $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί τ και έχουμε:

Σχήμα πεπερασμένων διαφορών

$$U_i^{n+1} = \mu a_i^n U_{i-1}^n + (1 - 2\mu a_i^n - \tau c_i^n) U_i^n + \mu a_i^n U_{i+1}^n, \quad (16)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (17)$$

$$U_0^n = 0 \quad \text{και} \quad U_{N_x+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t. \quad (18)$$

όπου $\mu = \tau/h^2$ είναι ο αριθμός Courant.

Η μέθοδος αυτή είναι άμεση και υλοποιείται πολύ εύκολα αφού για κάθε χρονικό βήμα απαιτείται να γνωρίζουμε μόνον τις τιμές στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

Θεώρημα

Θεωρήστε την άμεση μέθοδο (16)–(18), και έστω u η ακριβής λύση του προβλήματος (13)–(15). Υποθέστε, επιπλέον, ότι ο αριθμός Courant μ είναι τέτοιος ώστε

$$\mu a_i^n + \frac{\tau}{4} c_i^n \leq \frac{1}{2},$$

για κάθε τ, h και για κάθε $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$. Τότε

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} |u(t_n, x_i) - U_i^n| \leq T_f \left(\frac{\tau}{2} M_{tt} + \frac{h^2}{12} M_{xxxx} A \right), \quad \text{για } n = 1, \dots, N_t,$$

όπου

$$A = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |a(t,x)|, \quad M_{tt} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{tt}(t,x)|, \quad M_{xxxx} = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}} |u_{xxxx}(t,x)|,$$

και με $\mathcal{R}$ συμβολίζουμε το ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R} = [0, T_f] \times [a, b]$.

Άσκηση:

Αποδείξτε το παραπάνω θεώρημα.

Ευστάθεια - 1

Κατά τα γνωστά παίρνουμε το αντίστοιχο Π.Α.Τ. σ' ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών και θεωρούμε το πλέγμα (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε την (16) για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \mu a_j^n U_{j-1}^n + (1 - 2\mu a_j^n - \tau c_j^n) U_j^n + \mu a_j^n U_{j+1}^n \\ \Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikjh} &= \mu a_j^n \lambda^n e^{ik(j-1)h} + (1 - 2\mu a_j^n - \tau c_j^n) \lambda^n e^{ikjh} + \mu a_j^n \lambda^n e^{ik(j+1)h}. \end{aligned}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\lambda^n e^{ikjh}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu a_j^n e^{-ikh} + 1 - 2\mu a_j^n - \tau c_j^n + \mu a_j^n e^{ikh} \\ \Rightarrow \lambda &= 1 - \tau c_j^n + \mu a_j^n \underbrace{(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2)}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}} \\ \Rightarrow \lambda &= 1 - \tau c_j^n - 4\mu a_j^n \sin^2 \frac{kh}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, για να είναι ευσταθής η μέθοδος πρέπει $|\lambda| \leq 1$. Όμως

$$\begin{aligned} |\lambda| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \tau c_j^n - 4\mu a_j^n \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \tau c_j^n + 4\mu a_j^n \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \tau c_j^n + 4\mu a_j^n \leq 2 \Leftrightarrow \mu a_j^n + \frac{\tau}{4} c_j^n \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις που αυτή η συνθήκη μπορεί να είναι αρκετά περιοριστική.

Πεπλεγμένες μέθοδοι

Επέκταση της μεθόδου Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \alpha_i^n \left(\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_i^n (U_i^{n+1} + U_i^n), \end{aligned} \quad (19)$$

όπου

$$\alpha_i^n := \frac{a(t_{n+1}, x_i) + a(t_n, x_i)}{2} \quad \text{και} \quad \gamma_i^n := \frac{c(t_{n+1}, x_i) + c(t_n, x_i)}{2},$$

και $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (19) επί τ , οπότε καταλήγουμε ισοδύναμα στο σχήμα:

$$\begin{aligned} & -\mu\alpha_i^n U_{i-1}^{n+1} + (2 + 2\mu\alpha_i^n + \tau\gamma_i^n)U_i^{n+1} - \mu\alpha_i^n U_{i+1}^{n+1} \\ & = \mu\alpha_i^n U_{i-1}^n + (2 - 2\mu\alpha_i^n - \tau\gamma_i^n)U_i^n - \mu\alpha_i^n U_{i+1}^n, \end{aligned} \quad (20)$$

όπου $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_x$ και $\mu = \tau/h^2$ είναι ο αριθμός Courant.

Η μέθοδος αυτή είναι πεπλεγμένη αφού σε κάθε χρονικό βήμα πρέπει και πάλι να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα.

Ευστάθεια – 1

Θεωρούμε το αντίστοιχο Π.Α.Τ. σ' ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών και θεωρούμε το πλέγμα (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$ και $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\tau = T_f/N_t$ και $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Θέτουμε: $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikjh}$, ($k \in \mathbb{R}$), την προσεγγιστική λύση στο (t_n, x_j) .

Χρησιμοποιούμε την (20) για να προχωρήσουμε ένα βήμα στον χρόνο:

$$\begin{aligned} & -\mu\alpha_j^n U_{j-1}^{n+1} + (2 + 2\mu\alpha_j^n + \tau\gamma_j^n)U_j^{n+1} - \mu\alpha_j^n U_{j+1}^{n+1} \\ & = \mu\alpha_j^n U_{j-1}^n + (2 - 2\mu\alpha_j^n - \tau\gamma_j^n)U_j^n - \mu\alpha_j^n U_{j+1}^n \\ \Rightarrow & -\mu\alpha_j^n \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h} + (2 + 2\mu\alpha_j^n + \tau\gamma_j^n)\lambda^{n+1} e^{ikjh} - \mu\alpha_j^n \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} \\ & = \mu\alpha_j^n \lambda^n e^{ik(j-1)h} + (2 - 2\mu\alpha_j^n - \tau\gamma_j^n)\lambda^n e^{ikjh} + \mu\alpha_j^n \lambda^n e^{ik(j+1)h}. \end{aligned}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\lambda^n e^{ikjh}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} & -\mu\alpha_j^n \lambda e^{-ikh} + (2 + 2\mu\alpha_j^n + \tau\gamma_j^n)\lambda - \mu\alpha_j^n \lambda e^{ikh} \\ & = \mu\alpha_j^n e^{-ikh} + (2 - 2\mu\alpha_j^n - \tau\gamma_j^n) + \mu\alpha_j^n e^{ikh}. \end{aligned}$$

Άρα

$$(2 + \tau\gamma_j^n) \lambda - \mu\alpha_j^n \lambda \underbrace{(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2)}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}} = 2 - \tau\gamma_j^n + \mu\alpha_j^n \underbrace{(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2)}_{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}}$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 - \tau\gamma_j^n - 4\mu\alpha_j^n \sin^2 \frac{kh}{2}}{2 + \tau\gamma_j^n + 4\mu\alpha_j^n \sin^2 \frac{kh}{2}}.$$

Άρα $|\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow \mu \geq 0$, επομένως η μέθοδος αυτή είναι ευσταθής χωρίς περιορισμούς.