

Μ.Π.Δ. για το πρόβλημα των δύο σημείων

Μη ομοιόμορφος διαμερισμός

Δ. Μητσούδης

Το πρόβλημα των δύο σημείων – Μη ομοιόμορφος διαμερισμός

Θεωρούμε και πάλι το πρόβλημα δύο σημείων:

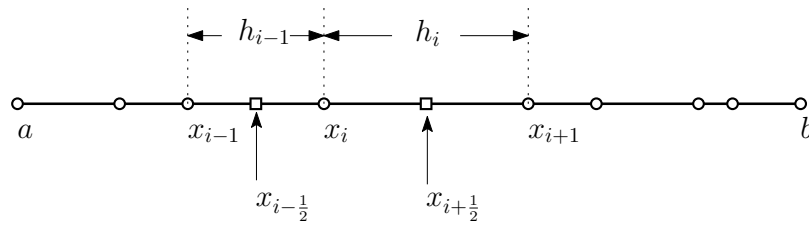
$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

με q, f όπως πριν, αλλά τώρα θα θεωρήσουμε ένα διαμερισμό του $[a, b]$,

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b,$$

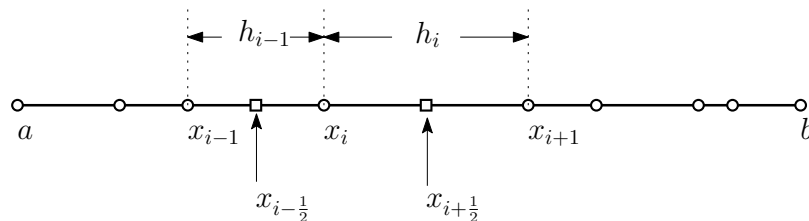
που **δεν είναι κατ' ανάγκην ομοιόμορφος**.

Συμβολισμοί



- h_i : το μήκος του κάθε υποδιαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$, δηλαδή $h_i := x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.
- $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$: τα μέσα των διαστημάτων $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$, αντίστοιχα.
- $U_i \approx u(x_i)$.
- Ξεκινάμε την αρίθμηση από 1 και όχι από 0, γιατί έχουμε υπ' όψιν την υλοποίηση της μεθόδου στο MATLAB.

Προσέγγιση της δευτέρας παραγώγου



$$\begin{aligned}
 u''(x_i) &= (u'(x_i))' \approx \frac{u'(x_{i+1/2}) - u'(x_{i-1/2})}{\frac{h_i}{2} + \frac{h_{i-1}}{2}} \\
 &\approx \frac{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-1}}}{\frac{1}{2}(h_i + h_{i-1})} \\
 &= \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του (1)

Αρα καταλήγουμε στο σχήμα:

$$-\frac{2}{h_{i-1}+h_i} \left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h_i} - \frac{U_i-U_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (2)$$

όπου λόγω των σ.σ. Dirichlet: $U_1 = U_{N+1} = 0$.

Ισοδύναμα,

$$-\frac{1}{h_{i-1}} U_{i-1} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} + \frac{h_{i-1}+h_i}{2} q(x_i) \right) U_i - \frac{1}{h_i} U_{i+1} = \frac{h_{i-1}+h_i}{2} f(x_i), \quad (3)$$

για $i = 2, 3, \dots, N$, με $U_1 = U_{N+1} = 0$.

Παρατήρηση: Αν $h_i = h := (b-a)/N$, για $i = 1, 2, \dots, N$, δηλαδή για ομοιόμορφο διαμερισμό, καταλήγουμε στο γνωστό μας σχήμα πεπερασμένων διαφορών με τρία σημεία.

Το σχήμα σε μορφή γραμμικού συστήματος

$$AU = F, \quad (4)$$

όπου ο πίνακας A είναι ο:

$$\begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{h_1 h_2} + \frac{h_1+h_2}{2} q(x_2) & -\frac{1}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{h_2+h_3}{h_2 h_3} + \frac{h_2+h_3}{2} q(x_3) & -\frac{1}{h_3} & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{h_{N-1}+h_N}{h_{N-1} h_N} + \frac{h_{N-1}+h_N}{2} q(x_N) \end{pmatrix},$$

και τα διανύσματα U και F δίνονται από τις:

$$U = (U_2, \dots, U_N)^T \text{ και } F = \left(\frac{h_1+h_2}{2} f(x_2), \frac{h_2+h_3}{2} f(x_3), \dots, \frac{h_{N-1}+h_N}{2} f(x_N) \right)^T.$$

Παράδειγμα

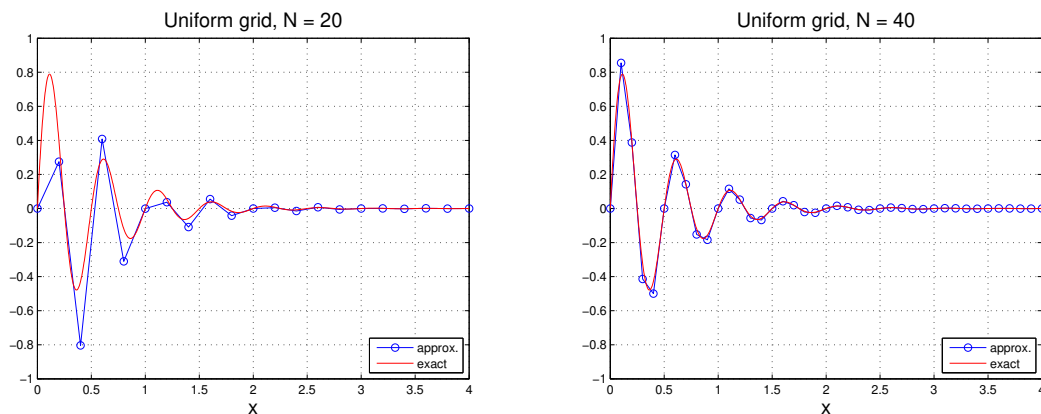
Θεωρούμε το πρόβλημα (1) με

$$[a, b] = [0, 4], \quad q(x) := 4, \quad f(x) := 16\pi \left(\pi \sin(4\pi x) + \cos(4\pi x) \right) e^{-2x}.$$

Τότε η ακριβής λύση είναι:

$$u(x) = \sin(4\pi x) e^{-2x}.$$

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται η ακριβής λύση και η προσεγγιστική λύση με τη Μ.Π.Δ. για ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, 4]$ α) με $N = 20$ και β) με $N = 40$ υποδιαστήματα.



(α) Ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 20$ (β) Ομοιόμορφος διαμερισμός, $N = 40$

Παρατηρήσεις

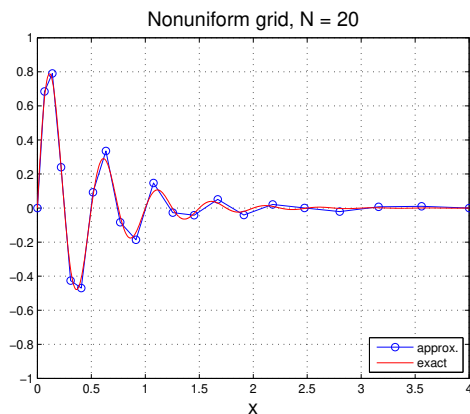
Από το σχήμα βλέπουμε ότι η λύση έχει **πιο απότομες μεταβολές στο διάστημα $[0, 2]$ από ότι στο $[2, 4]$** .

Ως εκ τούτου πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο (ομοιόμορφος) διαμερισμός μας να είναι αρκετά λεπτός έτσι ώστε να περιέχονται αρκετά σημεία στο διάστημα που η λύση μας μεταβάλλεται απότομα.

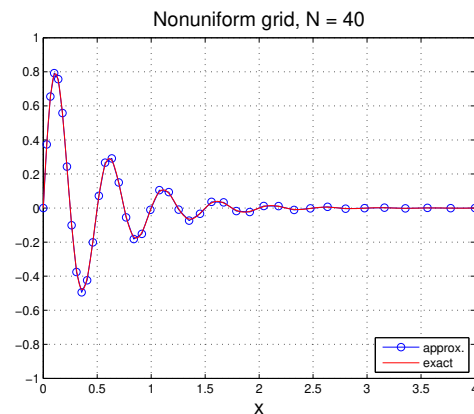
Μια άλλη στρατηγική όμως είναι να χρησιμοποιήσουμε **έναν μη ομοιόμορφο διαμερισμό και να αναδιατάξουμε έτσι τους κόμβους ώστε να περιέχονται περισσότερα σημεία στο «δύσκολο» διάστημα και λιγότερα στο «εύκολο»**.

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται η ακριβής λύση και η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για **μη ομοιόμορφο διαμερισμό** του $[0,4]$, α) με $N = 20$ και β) με $N = 40$ υποδιαστήματα.

Παρατηρήστε ότι οι κόμβοι πυκνώνουν όσο πλησιάζουμε προς το αριστερό άκρο του διαστήματος, και ότι τώρα η προσέγγισή μας είναι πολύ καλύτερη από την αντίστοιχη για ομοιόμορφο διαμερισμό.



(α) Μη ομοιόμ. διαμερισμός, $N = 20$



(β) Μη ομοιόμ. διαμερισμός, $N = 40$

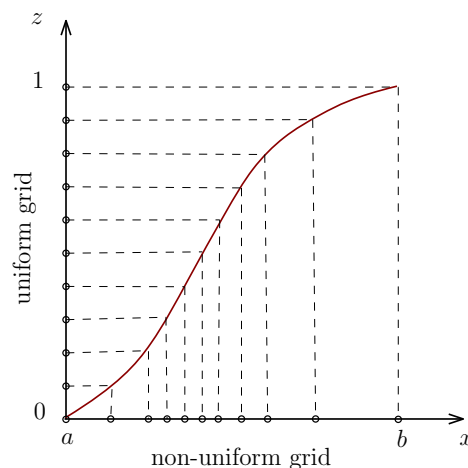
Ένας τρόπος δημιουργίας μη ομοιόμορφου διαμερισμού

Ξεκινάμε από έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0,1]$, $z_i = (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$, όπου $h = 1/N$, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε κάποια κατάλληλη απεικόνιση $\mathcal{X}(z)$ για να ορίσουμε τους κόμβους του μη ομοιόμορφου διαμερισμού $x_i := \mathcal{X}(z_i)$.

Στο ακόλουθο σχήμα έχουμε τοποθετήσει στον κάθετο άξονα τα z και στον οριζόντιο τα x .

(Με αυτή την επιλογή αξόνων στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης $z = \mathcal{X}^{-1}(x)$.)

Παρατηρήστε πώς τα ομοιόμορφα καταναμημένα σημεία στον άξονα των z αντιστοιχούν στα μη ομοιόμορφα καταναμημένα σημεία του άξονα των x .



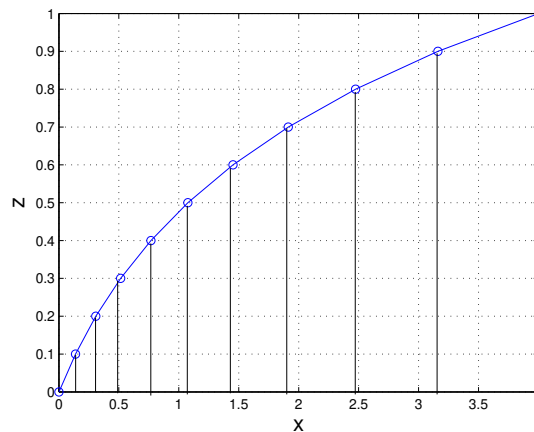
Παράδειγμα

Στο παράδειγμά μας ενδιαφερόμαστε να πυκνώσουμε τα σημεία του διαμερισμού μας προς το αριστερό άκρο του διαστήματος.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί π.χ. με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(z) = (b - a) \frac{e^{kz} - 1}{e^k - 1} + a, \quad z \in [0, 1], \quad (5)$$

όπου k είναι κατάλληλος συντελεστής ενίσχυσης της πυκνώσης. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται ο τρόπος λειτουργίας της (5) στο διάστημα $[0, 4]$ με $k = 2$.



Τα αποτελέσματα που χρησιμοποιήθηκαν για το σχήμα της Σελίδας 9, έχουν επίσης προκύψει με $k = 2$. Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται το σχετικό σφάλμα

$$\mathcal{E}(N) = \frac{\max_{1 \leq i \leq N+1} |u(x_i) - U_i|}{\max_{1 \leq i \leq N+1} |u(x_i)|},$$

για ομοιόμορφο και μη ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0, 4]$ σε N υποδιαστήματα.

$\mathcal{E}(N)$	Ομοιόμορφος διαμ.	Μη ομοιόμορφος διαμ.
$N = 20$	0.8811	0.0890
$N = 40$	0.1174	0.0230
$N = 80$	0.0283	0.0056
$N = 160$	0.0071	0.0014

Παρατήρηση

Φυσικά αυτό που θα επιθυμούσε κανείς από μια αριθμητική μέθοδο θα ήταν η επιλογή των κόμβων να γίνεται **«αυτόματα»** και **χωρίς εκ των προτέρων γνώση της συμπεριφοράς της λύσης**.

Τέτοιες υπολογιστικές μέθοδοι **«αυτόματης αναδιαμέρισης» (adaptive methods)** υπάρχουν αλλά η παρουσίασή τους ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του μαθήματος.