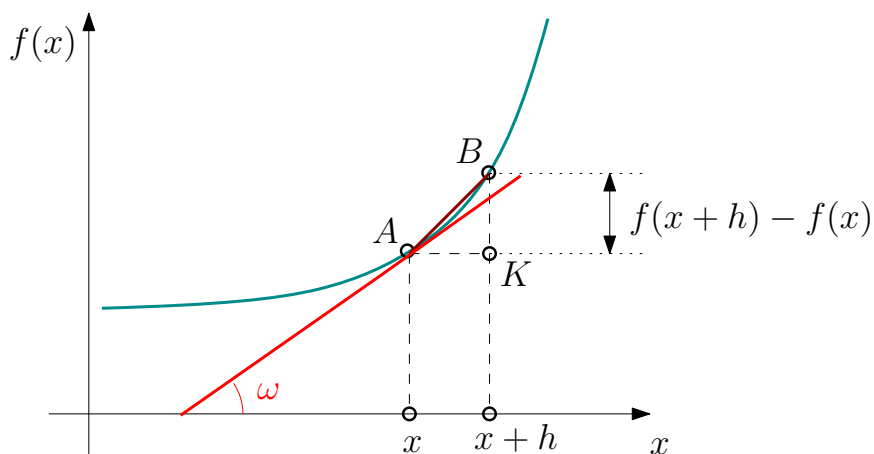


Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών – Μέρος 1ο

Δ. Μητσούδης

Διαιρεμένες διαφορές – Η βασική ιδέα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $x \in [a, b]$, $h > 0$ τ.ω. $x + h \in [a, b]$.

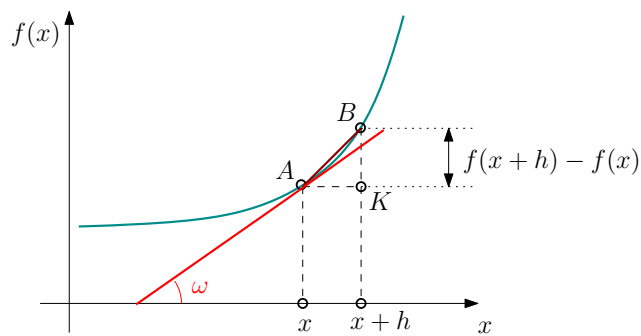


Τότε αν h «μικρό»:

$$\omega \approx \widehat{BAK} \Leftrightarrow \tan \omega \approx \tan \widehat{BAK} = \frac{|BK|}{|AK|} \Leftrightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Προς τα εμπρός διαιρεμένη διαφορά

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $h > 0$.



Ορισμός

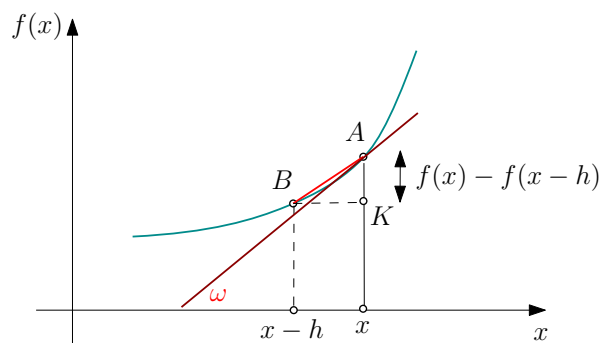
Ορίζουμε ως προς τα εμπρός διαιρεμένη διαφορά (forward divided difference) της f στο x με βήμα h την ποσότητα

$$\delta_{h,+}f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

όπου h τέτοιο ώστε $x+h \in [a, b]$.

Προς τα πίσω διαιρεμένη διαφορά

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $h > 0$.



Ορισμός

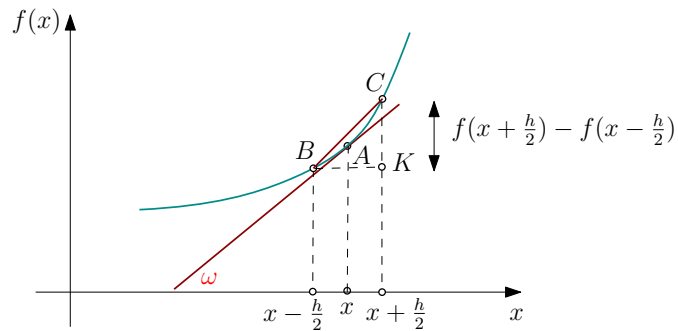
Ορίζουμε ως προς τα πίσω διαιρεμένη διαφορά (backward divided difference) της f στο x με βήμα h την ποσότητα

$$\delta_{h,-}f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

(όπου h τέτοιο ώστε $x-h \in [a, b]$).

Κεντρική διαιρεμένη διαφορά

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια **φραγμένη** συνάρτηση και $h > 0$.



Ορισμός

Ορίζουμε ως **κεντρική διαιρεμένη διαφορά** (central divided difference) της f στο x με βήμα h την ποσότητα

$$\delta_h f(x) = \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h},$$

(όπου h τέτοιο ώστε $x \pm \frac{h}{2} \in [a, b]$).

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_{h,+} f(x) = f'_+(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_{h,-} f(x) = f'_-(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_h f(x) = f'(x)$$

(όταν φυσικά τα όρια αυτά υπάρχουν, δηλ. οι παράγωγοι είναι καλώς ορισμένες).

Άρα είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι

$$\delta_{h,+} f(x) \approx f'_+(x), \quad \delta_{h,-} f(x) \approx f'_-(x), \quad \delta_h f(x) \approx f'(x).$$

Φυσικά, αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$ και άρα οι τρεις αυτές διαιρεμένες διαφορές μπορούν να θεωρηθούν ως **τρεις διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης της $f'(x)$** .

Ερωτήματα:

- 1 Πόσο καλές είναι αυτές οι προσεγγίσεις;
- 2 Ποιά από τις τρεις προσεγγίσεις πρέπει να προτιμήσουμε;

Λήμμα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε

$$|\delta_{h,+}f(x) - f'(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

$$|\delta_{h,-}f(x) - f'(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

Αν, επιπλέον, $f \in C^3[a, b]$ (τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη), τότε

$$|\delta_h f(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{\xi \in [a,b]} |f'''(\xi)|$$

Απόδειξη

Από Θ. Taylor: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi)$, για $\xi \in (x, x+h)$.

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(\xi) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{=\delta_{h,+}f(x)} - f'(x) = \frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$\therefore |\delta_{h,+}f(x) - f'(x)| = \frac{h}{2}|f''(\xi)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [x, x+h]} |f''(\xi)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

Άσκηση:

Αποδείξτε την εκτίμηση σφάλματος:

$$|\delta_{h,-}f(x) - f'(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

Έστω $f \in C^3[a, b]$. Τότε

$$f\left(x + \frac{h}{2}\right) = f(x) + \frac{h}{2}f'(x) + \frac{h^2}{8}f''(x) + \frac{h^3}{48}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in \left(x, x + \frac{h}{2}\right)$$

$$f\left(x - \frac{h}{2}\right) = f(x) - \frac{h}{2}f'(x) + \frac{h^2}{8}f''(x) - \frac{h^3}{48}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in \left(x - \frac{h}{2}, x\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) = hf'(x) + \frac{h^3}{48}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}}_{=\delta_h f(x)} = f'(x) + \frac{h^2}{48}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$\Rightarrow \delta_h f(x) - f'(x) = \frac{h^2}{48}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$\Rightarrow |\delta_h f(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{48}(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|)$$

$$\Rightarrow |\delta_h f(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{48}\left(\max_{x \in [a, b]} |f'''(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|\right)$$

$$\Rightarrow |\delta_h f(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)| \quad \text{Q.E.D.}$$

Ορισμός

Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και έστω $g_h(x)$ μια προσέγγιση της g στο σημείο $x \in [a, b]$ με παράμετρο διακριτοποίησης $h > 0$.

Λέμε ότι η $g_h(x)$ είναι **συγκλίνουσα** αν

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (g_h(x) - g(x)) = 0.$$

Θα λέμε ότι η $g_h(x)$ **συγκλίνει** στην $g(x)$ **με τάξη p** ($p > 0$) αν

$$|g_h(x) - g(x)| = O(h^p).$$

Άρα, μπορούμε να πούμε ότι οι προς τα εμπρός και προς τα πίσω διαφορές $\delta_{h,+}$ και $\delta_{h,-}$ είναι προσεγγίσεις πρώτης τάξης της $f'(x)$, ενώ η κεντρική διαφορά δ_h είναι προσέγγιση δεύτερης τάξης.

Προς τα εμπρός και προς τα πίσω διαφορές δεύτερης τάξης

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\delta_{h,+2}f(x) &= \frac{1}{2h} \left(-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x) \right) \\ \delta_{h,-2}f(x) &= \frac{1}{2h} \left(-f(x-2h) + 4f(x-h) - 3f(x) \right)\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι αν $f \in C^3[a, b]$, τότε

$$\begin{aligned}|\delta_{h,+2}f(x) - f'(x)| &= O(h^2) \\ |\delta_{h,-2}f(x) - f'(x)| &= O(h^2)\end{aligned}$$

Διαιρεμένες διαφορές για παραγώγους υψηλότερης τάξης

$$\begin{aligned}\delta_h^2 f(x) &= \delta_h(\delta_h f(x)) = \delta_h \left(\frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h} \right) \\ &= \frac{\delta_h f(x + \frac{h}{2}) - \delta_h f(x - \frac{h}{2})}{h} \\ &= \frac{\frac{f(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} - \frac{f(x - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.\end{aligned}$$

Άρα η **δεύτερη κεντρική διαιρεμένη διαφορά** ορίζεται ως εξής:

$$\delta_h^2 f(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

$$\delta_h^2 f(x) \approx f''(x).$$

Λήμμα

Έστω $f \in C^4[a, b]$. Τότε

$$|\delta_h^2 f(x) - f''(x)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| = \frac{h^2}{12} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Υπενθύμιση: Αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ ορίζουμε

$$\|g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x, x+h) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x-h, x) \\ \Rightarrow f(x+h) + f(x-h) &= 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24} (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}_{=\delta_h^2 f(x)} &= f''(x) + \frac{h^2}{24} (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \\ \Rightarrow \delta_h^2 f(x) - f''(x) &= \frac{h^2}{24} (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \\ \Rightarrow |\delta_h^2 f(x) - f''(x)| &\leq \frac{h^2}{24} (|f^{(4)}(\xi_1)| + |f^{(4)}(\xi_2)|) \\ \Rightarrow |\delta_h^2 f(x) - f''(x)| &\leq \frac{h^2}{24} \left(\max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \right) \\ \Rightarrow |\delta_h^2 f(x) - f''(x)| &\leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Μονόπλευρες διαιρ. διαφορές για την προσέγγιση 2ης παραγώγου

Ανάλογα ορίζουμε και μονόπλευρες διαιρεμένες διαφορές για την προσέγγιση της δευτέρας παραγώγου:

$$\delta_{h,\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\alpha} f(x) = \frac{1}{h^2} \left(2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h) \right)$$

και

$$\delta_{h,\alpha\rho\iota\sigma\tau.} f(x) = \frac{1}{h^2} \left(2f(x) - 5f(x-h) + 4f(x-2h) - f(x-3h) \right).$$

Αποδεικνύεται ότι αν $f \in C^4[a, b]$, τότε

$$|\delta_{h,\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\alpha} f(x) - f''(x)| \leq \frac{22}{24} h^2 \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|,$$

$$|\delta_{h,\alpha\rho\iota\sigma\tau.} f(x) - f''(x)| \leq \frac{22}{24} h^2 \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (Μ.Π.Δ) για προβλήματα δύο σημείων

Finite Difference Methods for two-point boundary value problems

Μ.Π.Δ. για το πρόβλημα δύο σημείων - Ομογενείς σ.σ. Dirichlet

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $q, f \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

Έστω $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ ένας **ομοιόμορφος** διαμερισμός του $[a, b]$ με βήμα h . Δηλ.

$$h = \frac{b-a}{N+1} \quad \text{και} \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

The diagram shows a horizontal line segment representing the interval [a, b]. The endpoints are labeled a and b. Inside the segment, there are points labeled x_0, x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}. The distance between consecutive points is labeled h. Above the segment, the formula h = (b-a)/(N+1) is written. A double-headed arrow indicates the length h between two consecutive points.

Αναζητούμε προσεγγίσεις της λύσης u στα εσωτερικά σημεία (**κόμβοι**) $x_i, i = 1, \dots, N$.

Συμβολίζουμε με U_i την προσέγγιση της λύσης $u(x_i)$.

$$U_i \approx u(x_i)$$



Προσεγγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο $u''(x)$ από την κεντρική διαφορά δεύτερης τάξης. Δηλ.

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Τότε: η $-u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i)$ θα είναι κατά προσέγγιση ίση με

$$-\frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} + q(x_i)u(x_i) \approx f(x_i).$$

Δηλαδή, ψάχνουμε $U_i, i = 0, 1, \dots, N+1$, τ.ω.

$$\begin{aligned} U_0 &= 0, \quad U_{N+1} = 0, \\ -\frac{1}{h^2} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i &= f(x_i) \\ \Leftrightarrow -U_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i)) U_i - U_{i+1} &= h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους τα $U_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Μπορούμε να γράψουμε το προηγούμενο σύστημα στη μορφή:

$$AU = f,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 & & & \\ -1 & 2 + h^2 q(x_2) & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 + h^2 q(x_{N-1}) \\ & & & & -1 & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_{N-1}, U_N)^T,$$

$$f = h^2 (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N-1}), f(x_N))^T$$

Παρατηρήσεις

- Ο πίνακας A είναι **τριδιαγώνιος** ($a_{ij} = 0$ για $|i - j| > 1$) και **συμμετρικός**.
- Μπορούμε ν.δ.ο. ο A είναι **αντιστρέψιμος**. Άρα το σύστημα αυτό έχει **μοναδική λύση**.
- Μπορούμε ν.δ.ο. ο A είναι **θετικά ορισμένος** ($\forall x \in \mathbb{R}^N : x^T A x > 0$).

Τριδιαγώνια συστήματα

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$Ax = f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

όπου A είναι ο τριδιαγώνιος $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & c_n & a_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

με $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι

$$a_i, b_i, c_i \neq 0, \quad |a_1| > |b_1|, \quad |a_n| > |c_n|, \quad \text{και} \quad |a_i| \geq |b_i| + |c_i|, \quad 2 \leq i \leq n-1. \quad (4)$$

Σημείωση: Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε εδώ, δεν λαμβάνει υπ' όψιν της ότι ο συγκεκριμένος πίνακας που έχουμε είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια άλλη μέθοδος που λέγεται ανάλυση Cholesky.

Θ.δ.ο. ο A αντιστρέφεται και μπορεί να αναλυθεί στη μορφή

$$A = LU, \quad (5)$$

όπου L και U είναι οι διδιαγώνιοι πίνακες

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & & & & 0 \\ c_2 & d_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & \\ 0 & & & c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & & & 0 \\ & 1 & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & e_{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Η ανάλυση αυτή είναι μοναδική.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα άγνωστα στοιχεία $d_i, i = 1, \dots, n$ και $e_i, i = 1, \dots, n-1$.

Εξισώνουμε τα αντίστοιχα μη μηδενικά στοιχεία που βρίσκονται στη διαγώνιο και στην υπερδιαγώνιο του αριστερού και δεξιού μέλους της ισότητας (5):

$$\begin{aligned} a_1 = d_1 &\Rightarrow d_1 = a_1 & b_1 = d_1 e_1 &\Rightarrow e_1 = b_1/d_1 \\ a_2 = c_2 e_1 + d_2 &\Rightarrow d_2 = a_2 - c_2 e_1 & b_2 = d_2 e_2 &\Rightarrow e_2 = b_2/d_2 \\ & & \vdots & \end{aligned}$$

Αλγόριθμος της ανάλυσης του A σε LU

```
Είσοδος:  $a_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad b_i, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad c_i, i = 2, 3, \dots, n$   
 $d_1 = a_1$   
 $e_1 = b_1/d_1$   
for  $k = 2, \dots, n-1$  do  
     $d_k = a_k - c_k \cdot e_{k-1}$   
     $e_k = b_k/d_k$   
end for  
 $d_n = a_n - c_n \cdot e_{n-1}$ 
```

Πλήθος πράξεων = $(2n - 2)$ πολ/σμοί-διαιρέσεις και $(n - 1)$ προσθέσεις.

Παρατηρήσεις

Ο αλγόριθμος θα είναι καλά ορισμένος $\Leftrightarrow d_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Αν $d_i \neq 0 \Rightarrow L$ θα είναι αντιστρέψιμος
 $\Rightarrow A$ θα είναι και αυτός αντιστρέψιμος
ως γινόμενο των αντιστρέψιμων πινάκων L και U .

Αποδεικνύεται ότι αν A, L, U οι προηγούμενοι πίνακες, και τα στοιχεία του τριδιαγώνιου πίνακα A ικανοποιούν τις υποθέσεις (4), τότε τα $d_i, i = 1, 2, \dots, n$, είναι μη μηδενικά και, επομένως ο προηγούμενος αλγόριθμος είναι καλά ορισμένος. Επιπλέον, $|e_i| < 1, \forall i = 1, \dots, n-1$.

Τώρα, για να λύσουμε το σύστημα (2) εργαζόμαστε ως εξής:

$$Ax = f \Leftrightarrow LUx = f \Leftrightarrow L(\underbrace{Ux}_{=y}) = f.$$

Λύνουμε αρχικά το σύστημα

$$Ly = f,$$

Είσοδος: $c_i, i = 2, 3, \dots, n, d_i, i = 1, 2, \dots, n, f_i, i = 1, 2, \dots, n$
 $y_1 = f_1/d_1$
for $k = 2, \dots, n$ **do**
 $y_k = (f_k - c_k \cdot y_{k-1})/d_k$
end for

Πλήθος πράξεων = $(2n - 1)$ πολ/σμοί-διαιρέσεις και $(n - 1)$ προσθέσεις.

Στη συνέχεια, λύνουμε το σύστημα

$$Ux = y$$

Είσοδος: $y_i, i = 1, 2, \dots, n, e_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$
 $x_n = y_n$
for $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$ **do**
 $x_k = y_k - e_k \cdot x_{k+1}$
end for

Πλήθος πράξεων = $(n - 1)$ πολ/σμοι και $(n - 1)$ προσθέσεις.

Κόστος της μεθόδου σε πράξεις και θέσεις μνήμης

Πράξεις: Συνολικά η μέθοδος απαιτεί $5n - 4$ πολλαπλασιασμούς–διαιρέσεις και $3n - 3$ προσθέσεις, δηλαδή πράξεις $O(n)$.

(Σημειώστε ότι, π.χ., η απαλοιφή Gauss για έναν πλήρη $n \times n$ πίνακα απαιτεί $O(n^3)$ πράξεις.)

Μνήμη: Χρειαζόμαστε περίπου $4n$ θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των διανυσμάτων a, b, c, f . Μετά

$$a_i \leftarrow d_i, \quad b_i \leftarrow e_i, \quad f_i \leftarrow y_i \leftarrow x_i$$

Άρα συνολικά **οι απαιτούμενες θέσεις μνήμης είναι μόνο $4n$.**

Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το σχετικά απλό πρόβλημα είδαμε τα βασικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής επίλυσης ενός Π.Σ.Τ. για μια Δ.Ε.

- Αρχικά **διακριτοποιούμε** το πρόβλημα. Παίρνουμε μια διαμέριση του χωρίου (στην περίπτωση μας του διαστήματος $[a, b]$) και προσεγγίζουμε την παράγωγο (στην περίπτωση μας με ένα πηλίκο διαφορών).
- Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα. Το λύνουμε με κάποια κατάλληλη μέθοδο και έτσι υπολογίζουμε προσεγγίσεις της λύσης της Δ.Ε. σε κάθε κόμβο (διακριτικό σημείο) του διαμερισμού μας.

Μη ομογενείς σ.σ. Dirichlet

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b] \\ u(a) = c, \quad u(b) = d \end{cases}$$

Τώρα απαιτείται λίγη προσοχή στα άκρα a και b .

(Σε σχέση με πριν θα επηρεαστούν μόνον η πρώτη και η τελευταία εξίσωση.)

$$\text{Για } i = 1 : \quad -\frac{1}{h^2} (U_0 - 2U_1 + U_2) + q(x_1)U_1 = f(x_1)$$

$$\stackrel{U_0=c}{\implies} (2 + h^2 q(x_1))U_1 - U_2 = c + h^2 f(x_1)$$

$$\text{Για } i = N : \quad -\frac{1}{h^2} (U_{N-1} - 2U_N + U_{N+1}) + q(x_N)U_N = f(x_N)$$

$$\stackrel{U_{N+1}=d}{\implies} -U_{N-1} + (2 + h^2 q(x_N))U_N = d + h^2 f(x_N)$$

Άρα καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$AU = \tilde{f}, \quad \text{όπου} \quad \tilde{f} = h^2 \begin{pmatrix} \frac{c}{h^2} + f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ \frac{d}{h^2} + f(x_N) \end{pmatrix},$$

όπου ο A είναι και πάλι ο τριδιαγώνιος πίνακας (1).

Συνοριακές συνθήκες Neumann

Θεωρούμε το πρόβλημα

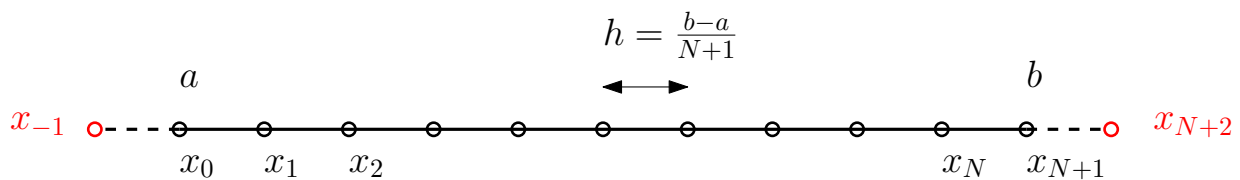
$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & \text{στο } [a, b] \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

όπου, και πάλι, $a, b \in \mathbb{R}$, $q, f \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

Εδώ απαιτείται λίγο μεγαλύτερη προσοχή στο πώς θα χειριστούμε τις σ.σ. στα άκρα a και b .

Καταρχήν εισάγουμε δύο νέους βοηθητικούς κόμβους στη διαμέρισή μας:

$$x_{-1} = a - h, \quad x_{N+2} = b + h.$$



Παίρνουμε ως προσέγγιση της $u'(a)$ την κεντρική διαφορά με βήμα $2h$, δηλ.

$$u'(a) \approx \frac{U_1 - U_{-1}}{2h}. \quad \text{Όμως } u'(a) = 0 \Rightarrow U_{-1} = U_1.$$

Εντελώς ανάλογα,

$$u'(b) \approx \frac{U_{N+2} - U_N}{2h}. \quad \text{Όμως } u'(b) = 0 \Rightarrow U_{N+2} = U_N.$$

Άρα για $i = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h^2}(U_{-1} - 2U_0 + U_1) + q(x_0)U_0 = f(x_0) \\ \xRightarrow{U_{-1}=U_1} & \frac{2}{h^2}(U_0 - U_1) + q(x_0)U_0 = f(x_0) \\ \implies & (2 + h^2q(x_0))U_0 - 2U_1 = h^2f(x_0) \end{aligned}$$

Ανάλογα, για $i = N + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h^2}(U_N - 2U_{N+1} + U_{N+2}) + q(x_{N+1})U_{N+1} = f(x_{N+1}) \\ \xRightarrow{U_{N+2}=U_N} & \frac{2}{h^2}(U_N - U_{N+1}) + q(x_{N+1})U_{N+1} = f(x_{N+1}) \\ \implies & -2U_N + (2 + h^2q(x_{N+1}))U_{N+1} = h^2f(x_{N+1}) \end{aligned}$$

Στα ενδιάμεσα σημεία, δηλ. για $i = 1, \dots, N$, θα έχουμε (όπως και πριν)

$$-U_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))U_i - U_{i+1} = h^2f(x_i)$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα $N + 2$ εξισώσεων με $N + 2$ αγνώστους τα U_i , $i = 0, 1, \dots, N + 1$:

$$AU = f,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_0) & -2 & & & \\ -1 & 2 + h^2q(x_1) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 + h^2q(x_N) & -1 \\ & & & -2 & 2 + h^2q(x_{N+1}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$U = (U_0, U_1, \dots, U_N, U_{N+1})^T,$$

$$f = h^2(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N), f(x_{N+1}))^T$$

Ο πίνακας A δεν είναι πλέον συμμετρικός.

Περιοδικό πρόβλημα

Αναζητούμε **περιοδική συνάρτηση** $u \in C^2(\mathbb{R})$ με περίοδο $b - a$ τέτοια ώστε

$$-u'' + qu = f, \text{ στο } \mathbb{R},$$

με q, f δεδομένες περιοδικές συναρτήσεις.

Αν $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $q \not\equiv 0$ μπορεί και πάλι να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αυτό έχει ακριβώς μια λύση.

Έστω $\mathbb{R}_{\text{per}}^{N+1} = \{v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{R} \text{ και } v_{i+N+1} = v_i, i \in \mathbb{Z}\}$.

Προσεγγίζουμε την $(u(x_i))_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}_{\text{per}}^{N+1}$ με την $U \in \mathbb{R}_{\text{per}}^{N+1}$ που ορίζεται από το σχήμα:

$$-\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Λόγω της περιοδικότητας των q, f διαπιστώνουμε ότι αν η ισότητα (7) ισχύει για $i = 0, 1, \dots, N + 1$, τότε ισχύει για κάθε ακέραιο i .

Το (7) είναι ένα γραμμικό σύστημα $N + 1$ εξισώσεων με $N + 1$ αγνώστους.

Αρχικά, οι άγνωστοι φαίνεται να είναι $N + 3$, δηλαδή οι $U_{-1}, U_0, \dots, U_N, U_{N+1}$. Όμως $U_{-1} = U_N$ και $U_{N+1} = U_0$.

Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα $N + 1$ εξισώσεων με $N + 1$ αγνώστους:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h^2}(U_N - 2U_0 + U_1) + q(x_0)U_0 = f(x_0), \\ & -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ & -\frac{1}{h^2}(U_{N-1} - 2U_N + U_0) + q(x_N)U_N = f(x_N). \end{aligned}$$

Ανάλυση σφάλματος – Σφάλμα συνέπειας

Ορίζουμε ως **σφάλμα συνέπειας** της μεθόδου την ποσότητα:

$$T(x_i) := -\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i) - f(x_i).$$

Δηλαδή, αντικαθιστούμε την **ακριβή** λύση στο σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ώστε να εκτιμήσουμε κατά πόσον η Μ.Π.Δ. επιτυγχάνει να «μιμηθεί» το πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Με άλλα λόγια το σφάλμα συνέπειας είναι ένα «μέτρο της αποτυχίας» της ακριβούς λύσης να ικανοποιεί την αριθμητική μέθοδο.

Αν το σφάλμα αυτό τείνει στο 0 καθώς το $h \rightarrow 0$, τότε η μέθοδος λέγεται **συνεπής**.

Έστω

$$T(x) := -\frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h))}{h^2} + q(x)u(x) - f(x).$$

Όμως, αν υποθέσουμε ότι $u \in C^4([a, b])$, έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) &\stackrel{\text{Taylor}}{=} u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi) \\ &\quad - 2u(x) \\ &\quad + u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\zeta) \\ &\quad (\text{όπου } \xi \in (x-h, x), \quad \zeta \in (x, x+h)) \\ &= h^2u''(x) + \frac{h^4}{24}(u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\zeta)) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{h^2 u''(x) + \frac{h^4}{24}(u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\zeta))}{h^2} + q(x)u(x) - f(x) \\ &= \underbrace{-u''(x) + q(x)u(x) - f(x)}_{=0} - \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\zeta)) \end{aligned}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι αν $u \in C^4([a, b])$, τότε

$$\max_{1 \leq i \leq N} |T(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|. \quad (8)$$

Η εκτίμηση (8) μας λέει ότι καθώς $h \rightarrow 0$, $T(x) \rightarrow 0$. Άρα το αριθμητικό μας σχήμα προσεγγίζει όλο και καλύτερα την δ.ε. καθώς το βήμα $h \rightarrow 0$.

Δυστυχώς, η (8) ΔΕΝ μας δίνει πληροφορίες για το πόσο καλά προσεγγίζουν οι προσεγγίσεις U_i τις ακριβείς τιμές $u(x_i)$, δηλαδή πληροφορίες για το πώς συγκλίνει η μέθοδος.

Βεβαίως, με τη βοήθεια και κάποιων άλλων θεωρητικών αποτελεσμάτων (π.χ. διακριτή αρχή μεγίστου) μπορεί κανείς να αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με τη σύγκλιση της μεθόδου.

Σύγκλιση της μεθόδου

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-u'' + qu = f, \text{ στο } [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0. \quad (9)$$

Έστω $U_i, i = 0, \dots, N+1$ η προσεγγιστική λύση του προβλήματος που υπολογίσαμε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Τότε αν u είναι η λύση του προβλήματος (9), $u \in C^4[a, b]$, και $\min_{x \in [a, b]} q(x) > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |u(x_i) - U_i| \leq Ch^2.$$

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για σ.σ. Neumann.