

Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) (... συνέχεια)

Δ. Μητσούδης

Προβλήματα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.) δύο σημείων

Θεωρούμε τη **Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ)** για την άγνωστη συνάρτηση y στο διάστημα (a, b)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

με τις **συνοριακές συνθήκες (σ.σ.)**

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (2)$$

Δηλαδή, αναζητούμε μια συνάρτηση $y(x)$ που α) ικανοποιεί τη ΣΔΕ (1), και β) παίρνει τις προκαθορισμένες τιμές y_0 και y_1 στα άκρα του διαστήματος a και b , αντίστοιχα.

Το μη ομογενές Π.Σ.Τ. (1), (2), έχει ένα αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (3)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (4)$$

Φυσικά, το πρόβλημα αυτό έχει πάντα τη λύση $y \equiv 0$, ανεξάρτητα από το τι είναι οι $p(x)$ και $q(x)$.

Επομένως έχει νόημα να εξετάσουμε κατά πόσον υπάρχουν και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το Π.Σ.Τ.

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x).$$

Επιπλέον,

$$\bullet \quad y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

$$\bullet \quad y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0 \stackrel{c_1=1}{\Rightarrow} c_2 = -\cot(\sqrt{2}\pi)$$

Άρα το Π.Σ.Τ. έχει μοναδική λύση

$$y(x) = \cos(\sqrt{2}x) - \cot(\sqrt{2}\pi) \sin(\sqrt{2}x).$$

Παράδειγμα 2

Θεωρήστε το Π.Σ.Τ.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = \alpha, \quad \alpha \text{ δοθείς αριθμός.}$$

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$
- $y(\pi) = \alpha \Rightarrow -c_1 = \alpha.$

Επομένως,

- αν $\alpha \neq -1$ οι δύο συνθήκες είναι **ασύμβατες**, επομένως το Π.Σ.Τ. **δεν έχει λύση**.
- Αν όμως $\alpha = -1$, τότε ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες ανεξάρτητα της τιμής του c_2 . Οπότε το Π.Σ.Τ. έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής:

$$y(x) = \cos x + c_2 \sin x.$$

Παράδειγμα 3 (ομογενές αντίστοιχο του Παραδ. 1)

Θεωρήστε το Π.Σ.Τ.

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x).$$

Τώρα,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \quad (\text{Επειδή } \sin(\sqrt{2}\pi) \neq 0.)$

Άρα το Π.Σ.Τ. έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Παράδειγμα 4 (ομογενές αντίστοιχο του Παραδ. 2)

Θεωρήστε το Π.Σ.Τ.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Επιπλέον,

$$\bullet \quad y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$\bullet \quad y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \underbrace{\sin \pi}_{=0} = 0.$$

Άρα η δεύτερη σ.σ. ικανοποιείται ανεξάρτητα της τιμής του c_2 .

Επομένως το Π.Σ.Τ. έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής:

$$y(x) = c_2 \sin x.$$

Παρατήρηση

Τα Παραδείγματα 1–4 μας δίνουν μια ένδειξη ότι η σχέση μεταξύ ομογενών και μη ομογενών γραμμικών Π.Σ.Τ. είναι η ίδια με τη σχέση μεταξύ ομογενών και μη ομογενών γραμμικών (αλγεβρικών) συστημάτων.

Συγκεκριμένα, είδαμε ότι **το μη ομογενές Π.Σ.Τ. του Παραδείγματος 1 έχει μοναδική λύση**, ενώ **το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του Παραδείγματος 3 έχει μόνο τη μηδενική λύση**.

Το μη ομογενές Π.Σ.Τ. του Παραδείγματος 2 είτε δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις, ενώ **το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του Παραδείγματος 4 έχει και άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική**.

Προβλήματα ιδιοτιμών

Θεωρήστε το Π.Σ.Τ.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Οι τιμές του λ για τις οποίες προκύπτουν μη τετριμμένες λύσεις του Π.Σ.Τ. (5) λέγονται **ιδιοτιμές** και οι αντίστοιχες μη τετριμμένες λύσεις λέγονται **ιδιοσυναρτήσεις**.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ .

1η περίπτωση: $\lambda < 0$

Έστω $\lambda = -\mu^2 < 0$.

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$.
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\mu\pi} + c_2 e^{-\mu\pi} = 0 \stackrel{c_2 = -c_1}{\Rightarrow} c_1 (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0$.

Επειδή $\mu \neq 0$ θα πρέπει αναγκαστικά $c_1 = 0$ άρα και $c_2 = 0$.

Άρα το πρόβλημα (5) δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

2η περίπτωση: $\lambda = 0$

Έστω $\lambda = 0$.

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \pi + c_2 = 0 \xrightarrow{c_2=0} c_1 = 0.$

Άρα το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος (5).

3η περίπτωση: $\lambda > 0$

Έστω $\lambda = \mu^2 > 0$ (για $\mu > 0$).

Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x).$$

Επιπλέον,

- $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\mu\pi) = 0.$

Επειδή αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις θα πρέπει $c_2 \neq 0$, επομένως θα πρέπει

$$\sin(\mu\pi) = 0 \Leftrightarrow \mu\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Οι αντίστοιχες τιμές του λ είναι

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ιδιοτιμές})$$

ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$y_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Συμπεράσματα

Δείξαμε ότι το Π.Σ.Τ. (5) έχει μια άπειρη ακολουθία θετικών ιδιοτιμών $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_n = \sin(nx)$, $n = 1, 2, \dots$.

Φυσικά, απομένει η περίπτωση το πρόβλημα να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Παρόλα αυτά το πρόβλημα (5) ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία προβλημάτων (προβλήματα τύπου Sturm-Liouville) για τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικές.

Άσκηση:

Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του Π.Σ.Τ.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \quad (6)$$

δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Σειρές Fourier

Γενικώς μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα ΜΔΕ υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια δοθείσα συνάρτηση ως άπειρο άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ημιτόνων ή/και συνημιτόνων).

Θεωρούμε μια σειρά της μορφής:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Στα σημεία που η σειρά αυτή συγκλίνει, ορίζεται μια συνάρτηση f που η τιμή της σε κάθε σημείο x είναι το άθροισμα της σειράς για τη δεδομένη αυτή τιμή του x . Τότε η σειρά αυτή λέγεται **σειρά Fourier της f** .

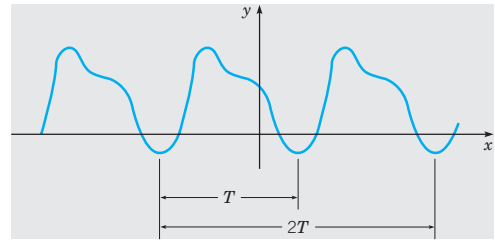
Θέλουμε να δούμε τι είδους συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω σειρών Fourier και να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού των συντελεστών της σειράς όταν μας δίνεται μια συγκεκριμένη συνάρτηση f .

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να μελετήσουμε συγκεκριμένες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$.

Περιοδικότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Υπενθύμιση: Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** με περίοδο $T > 0$, αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το $x + T$ όταν περιέχει το x και, επιπλέον,

$$f(x + T) = f(x). \quad (*)$$



Η μικρότερη τιμή της T για την οποία ισχύει η $(*)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος της f** .

Οι συναρτήσεις $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο

$$T = \frac{2L}{m}.$$

Ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Υπενθύμιση: Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** δύο πραγματικών συναρτήσεων u και v στο διάστημα $[a, b]$ τον αριθμό:

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x) dx.$$

Οι συναρτήσεις u και v θα λέγονται **ορθογώνιες** στο διάστημα $[a, b]$ αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με 0, δηλ.

$$(u, v) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b u(x)v(x) dx = 0.$$

Ένα σύνολο συναρτήσεων θα λέγεται ορθογώνιο, αν κάθε διακεκριμένο ζεύγος συναρτήσεων του συνόλου αυτού είναι ορθογώνιο.

Ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$

Οι συναρτήσεις $\sin(m\pi x/L)$ και $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων στο διάστημα $[-L, L]$.

Συγκεκριμένα, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \\ \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 0 \quad \text{για κάθε } m, n \\ \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}\end{aligned}$$

(Η απόδειξη των σχέσεων αυτών γίνεται με απ' ευθείας ολοκλήρωση.)

Υπολογισμός των συντελεστών a_m, b_m – Τύποι Euler-Fourier

Έστω ότι η σειρά συγκλίνει και

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (7)$$

Θα συσχετίσουμε τους συντελεστές a_m, b_m με την f με τη βοήθεια των προηγούμενων σχέσεων ορθογωνιότητας.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (7) επί $\cos \frac{n\pi x}{L}$, με $n > 0$ συγκεκριμένο ακέραιο, και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς x από $-L$ έως L .

Υποθέτουμε ότι επιτρέπεται να εναλλάξουμε τη σειρά των αθροισμάτων με τα ολοκληρώματα, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=L, \text{ αν } m=n, \quad =0, \text{ αν } m \neq n} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0}.\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Για να βρούμε το a_0 ολοκληρώνουμε την (7) ως προς x από $-L$ έως L :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L dx}_{=2L} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0}.$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Άρα

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

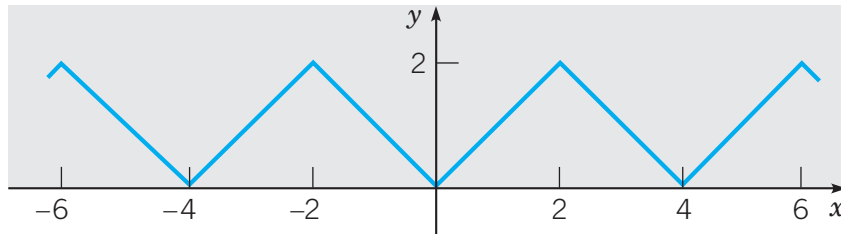
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Παράδειγμα

Έστω ότι $\exists$ σειρά Fourier που συγκλίνει στην f :

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$



Προσδιορίστε τους συντελεστές της σειράς αυτής.

Η σειρά Fourier θα έχει τη μορφή:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{2} + b_m \sin \frac{m\pi x}{2} \right).$$

Για το συντελεστή a_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Για τους συντελεστές a_m , $m > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{m\pi x}{2} dx \\ &\vdots \\ &= \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2}, & \text{αν } m \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } m \text{ άρτιος} \end{cases}. \end{aligned}$$

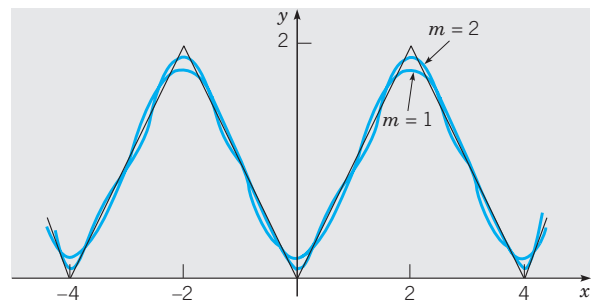
Για τους συντελεστές b_m , $m > 0$, προκύπτει ότι $b_m = 0$.

Αρα η σειρά Fourier θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

Ακολουθία μερικών αθροισμάτων:

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$$

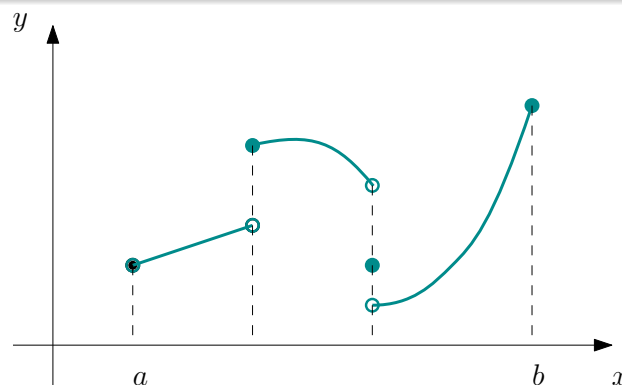


Υπενθύμιση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **κατά τμήματα συνεχής** σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, αν το διάστημα I μπορεί να διαμεριστεί από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ έτσι ώστε:

- Η f να είναι συνεχής σε κάθε (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Η f να τείνει σε πεπερασμένο όριο καθώς τα άκρα κάθε υποδιαστήματος προσεγγίζονται από το εσωτερικό του υποδιαστήματος.



Θεώρημα

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f ορίζεται εκτός του διαστήματος $[-L, L]$ έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

Τότε η f έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (10)$$

με συντελεστές που δίνονται από τις εξισώσεις (8) και (9).

Η σειρά Fourier

- συγκλίνει στην $f(x)$ σε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής,
- ενώ συγκλίνει στην τιμή $(f(x^+) + f(x^-))/2$ σε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ασυνεχής.

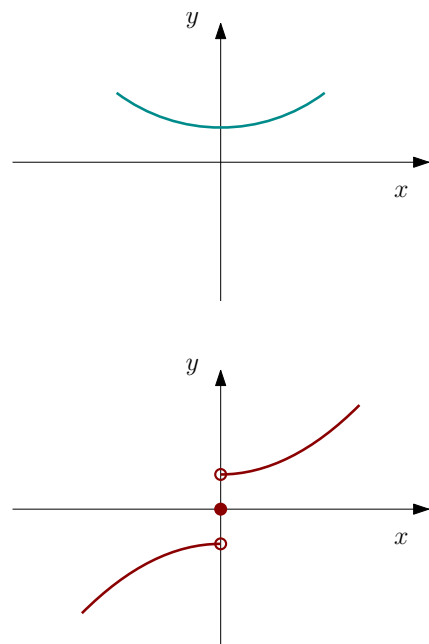
Υπενθύμιση

Ορισμός: Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το σημείο $-x$ όταν περιέχει το x και

$$f(-x) = f(x).$$

Η f λέγεται **περιττή** αν το πεδίο ορισμού της περιέχει το σημείο $-x$ όταν περιέχει το x και

$$f(-x) = -f(x).$$



Ιδιότητες άρτιων & περιττών συναρτήσεων

- 1 Το άθροισμα (διαφορά) και το γινόμενο (πηλίκο) δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
- 2 Το άθροισμα (διαφορά) δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.
- 3 Το γινόμενο (πηλίκο) δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
- 4 Το άθροισμα (διαφορά) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο (πηλίκο) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.
- 5 Αν η f είναι άρτια συνάρτηση τότε

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

- 6 Αν η f είναι περιττή συνάρτηση τότε

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

Συνημιτονική σειρά Fourier

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$ και ότι η f είναι **άρτια** περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$.

Τότε η $f(x) \cos(n\pi x/L)$ είναι **άρτια** και η $f(x) \sin(n\pi x/L)$ είναι **περιττή**.

Άρα οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{και} \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, αν η f είναι άρτια, τότε έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Ημιτονική σειρά Fourier

Έστω ότι οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-L, L]$ και ότι η f είναι **περιττή** περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$.

Τότε η $f(x) \cos(n\pi x/L)$ είναι **περιττή** και η $f(x) \sin(n\pi x/L)$ είναι **άρτια**.

Άρα οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, αν η f είναι περιττή, τότε έχει τη σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Επίλυση της κυματικής εξίσωσης
με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών

Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (11)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (\text{αρχική συνθήκη}) \quad (12)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \quad (\text{αρχική συνθήκη}) \quad (13)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet}) \quad (14)$$



Υποθέτουμε ότι: $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Τότε $u_t = XT'$ (όπου $T' = \frac{dT}{dt}$) και $u_{tt} = XT''$

Ανάλογα, $u_{xx} = X''T$

Αντικαθιστούμε στην (11) και έχουμε:

$$XT'' = c^2 X''T.$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $c^2 XT$ και παίρνουμε:

$$\underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}}_{\text{συναρτ. του } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συναρτ. του } x} = -\lambda \quad (\text{σταθερά διαχωρισμού})$$

Άρα

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0, \quad t > 0.$$

Από τις συνορ. συνθ. (14) έχουμε

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \end{cases}, \text{ ισχύουν για κάθε } t \Rightarrow X(0) = 0 \text{ και } X(L) = 0.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα αυτό είναι το πρόβλημα (6) προηγούμενης άσκησης στην οποία είδαμε ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση:

$$T'' + \lambda_n c^2 T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Η γενική της λύση είναι:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Επομένως, οι συναρτήσεις

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

είναι λύσεις της κυματικής εξ. (11), που ικανοποιούν τις σ.σ. (14).

Τώρα, λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος, θα έχουμε ότι και κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων αυτών θα είναι επίσης λύση. Άρα (τουλάχιστον τυπικά) η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, t)$$

είναι επίσης λύση.

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει. Τότε

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (15)$$

Θέλουμε η u να είναι λύση του προβλήματος (11)–(14). Άρα πρέπει να ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$
$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

Άρα οι σταθερές a_n και b_n πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι προηγούμενες σχέσεις. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g αναπτύσσονται σε σειρά Fourier καταλήγουμε ότι:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Άρα η λύση του προβλήματος (11)–(14) δίνεται από την (15), όπου οι συντελεστές a_n , b_n δίνονται από τις (16) και (17), αντίστοιχα.

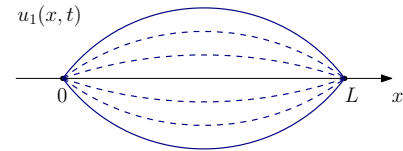
Παρατήρηση

Αν $g(x) = 0$, τότε η (15) παίρνει την μορφή

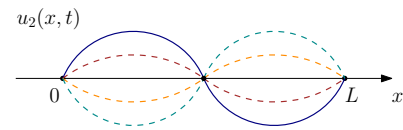
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L}}_{u_n(x, t)}.$$

Αν θέσουμε $\omega := \pi c/L$, τότε

$$u_1(x, t) = \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \text{όπου } 0 < \frac{\pi x}{L} < \pi$$



$$u_2(x, t) = \cos 2\omega t \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad \text{όπου } 0 < \frac{2\pi x}{L} < 2\pi$$



Παράρτημα – Επανάληψη σε χρήσιμες έννοιες

1. Ο τύπος του Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, και έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $1, 2, \dots, (n+1)$ στο I , τότε για κάθε x και ξ στο I ισχύει

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!} (x-\xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-\xi)^{n+1}, \quad (18)$$

όπου το η είναι ένας αριθμός μεταξύ των ξ και x (και εξαρτάται και από τους δύο).

Σε συμπαγή μορφή η (18) γράφεται ως εξής:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x-\xi)^k + E_{n+1}, \quad (19)$$

όπου ο όρος υπολοίπου E_{n+1} δίνεται από την σχέση

$$E_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-\xi)^{n+1},$$

με η όπως παραπάνω.

Αν στην (18) κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών βάζοντας στη θέση του x το $x+h$ και στη θέση του ξ το x , καταλήγουμε στην ακόλουθη, ισοδύναμη, έκφραση του τύπου του Taylor.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$, και έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $1, 2, \dots, (n+1)$ στο I , τότε για κάθε x στο I ισχύει

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n)!} h^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} h^{n+1}}_{E_{n+1}}, \quad (20)$$

όπου το h είναι οποιοσδήποτε αριθμός τέτοιος ώστε $x+h \in I$, και η είναι ένας αριθμός μεταξύ των x και $x+h$.

Ο όρος υπολοίπου E_{n+1} εξαρτάται από το h με δύο τρόπους:

- α) λόγω της ύπαρξης του όρου h^{n+1} , και
- β) επειδή το η εξαρτάται εν γένει από το h .

Καθώς το h τείνει προς το μηδέν, ο όρος E_{n+1} συγκλίνει και αυτός προς το μηδέν, ουσιαστικά τόσο γρήγορα όσο γρήγορα το h^{n+1} συγκλίνει στο μηδέν. Για να εκφράσουμε αυτό το ποιοτικό αποτέλεσμα γράφουμε

$$E_{n+1} = O(h^{n+1}) \quad \text{καθώς } h \rightarrow 0.$$

Η γραφή αυτή λέγεται **συμβολισμός του μεγάλου όμικρον** και είναι συντομογραφία της ανίσωσης

$$|E_{n+1}| \leq C |h|^{n+1}, \quad \text{όπου το } C \text{ είναι σταθερά.}$$

(Κάπως χονδρικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η σχέση $E_{n+1} = O(h^{n+1})$ υποδηλώνει ότι το E_{n+1} έχει παρόμοια συμπεριφορά με την πολύ απλούστερη έκφραση h^{n+1} .)

Σημειώστε ότι, ουσιαστικά, η (20) αντιστοιχεί σε μια ακολουθία θεωρημάτων, ένα για κάθε τιμή του n . Π.χ.,

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(\eta_1) h \\ &= f(x) + O(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(\eta_2)}{2} h^2 \\ &= f(x) + f'(x) h + O(h^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad f(x+h) &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \frac{f'''(\eta_3)}{6} h^3 \\ &= f(x) + f'(x) h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

2. Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός

Ένα $V \neq \emptyset$ θα λέγεται **πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος**, και τα στοιχεία του (ανεξάρτητα από τη φύση τους) θα λέγονται διανύσματα, αν ορίσουμε στον V δύο αλγεβρικές πράξεις, τη **διανυσματική πρόσθεση** και το **βαθμωτό πολλαπλασιασμό** ως εξής:

- I. Η **διανυσματική πρόσθεση** αντιστοιχεί σε κάθε $a, b \in V$ ένα μοναδικό διάνυσμα του V , που λέγεται άθροισμα των a και b και συμβολίζεται $a + b$.
- II. Ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** αντιστοιχεί σε κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και σε κάθε $a \in V$ ένα μοναδικό διάνυσμα του V , που λέγεται γινόμενο των λ και a και συμβολίζεται λa .

Από τις πράξεις αυτές απαιτούμε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

2. Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός (... συνέχεια)

Για οποιαδήποτε $a, b, c \in V$ και οποιουδήποτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ πρέπει

- ❶ $a + b = b + a$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).
- ❷ $a + (b + c) = (a + b) + c$ (προσεταιριστική ιδιότητα).
- ❸ Υπάρχει ένα μοναδικό «μηδενικό διάνυσμα» 0 τέτοιο ώστε $a + 0 = a$.
- ❹ Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα του V που το συμβολίζουμε με $-a$ έτσι ώστε $a + (-a) = 0$.
- ❺ $1 a = a$.
- ❻ $(\lambda \mu) a = \lambda(\mu a)$.
- ❼ $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (επιμεριστική ιδιότητα).
- ❽ $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ (επιμεριστική ιδιότητα).

Αν τα βαθμωτά μεγέθη ανήκουν στο $\mathbb{C}$ λέμε ότι έχουμε έναν μιγαδικό δ.χ..

2. Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

- 1 Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.
- 2 Το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.
- 3 Το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του n αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.
- 4 Το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$ που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο.

3. Χώροι με νόρμα (Normed spaces)

Ορισμός

Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του συνόλου (σώματος) $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

ονομάζεται **νόρμα**, αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- 1 $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- 2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in X$ και $\alpha \in K$.
- 3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$ (Τριγωνική ανισότητα)

Ισχύει το ακόλουθο χρήσιμο λήμμα:

Λήμμα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ και $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C}$, τότε

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right), \quad (21)$$

(όπου με $\overline{z}$ συμβολίζουμε το συζυγή του μιγαδικού αριθμού z .)

Ανάλογα, ισχύει και το αντίστοιχο αποτέλεσμα για ολοκληρώματα:

Λήμμα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz για ολοκληρώματα)

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right),$$

όπου οι συναρτήσεις f και g είναι τέτοιες ώστε να ορίζονται τα ολοκληρώματα.

3. Παραδείγματα χώρων με νόρμα

- Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ (ή στο χώρο $\mathbb{C}^n$), ορίζουμε για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Οι ιδιότητες (1) και (2) του Ορισμού προκύπτουν άμεσα, ενώ η τριγωνική ανισότητα αποδεικνύεται με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Επίσης ορίζουμε

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

και

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι πράγματι νόρμες.

3. Παραδείγματα χώρων με νόρμα

- Στο γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[a, b]$ (επί του σώματος των πραγματικών αριθμών) ορίζουμε

$$\|\cdot\|_{\infty} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\|_{\infty} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

(Άσκηση: Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_{\infty}$ είναι νόρμα.)

- Στο γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[a, b]$ επί του σώματος των πραγματικών (ή των μιγαδικών) αριθμών, ορίζουμε

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

4. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο (Inner product spaces)

(Θα περιοριστούμε σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους. Ότι πούμε γενικεύεται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία και για την περίπτωση των μιγαδικών γραμμικών χώρων.)

Ορισμός

Έστω X ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** στον X , αν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, συμμετρική και θετικά ορισμένη, δηλαδή

- 1 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$
- 2 $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in X.$
- 3 $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in X.$
- 4 $(x, x) > 0, \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$

Τότε ο X λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

4. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο (Inner product spaces)

Ορισμός

Έστω X ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$. Τα $x, y \in X$ θα λέγονται **ορθογώνια** αν $(x, y) = 0$. (Συμβολισμός: $x \perp y$.)

Λήμμα

Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz

$$\forall x, y \in X \quad |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

Πρόταση

Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε με $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$, ορίζεται μια νόρμα στον X , η οποία λέμε ότι παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

4. Παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

- ❶ Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο

$$(x, y) := (x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

- ❷ Στον $C[a, b]$ με $(\cdot, \cdot) : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο.