

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Δ. Μητσούδης

Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ)

ΜΔΕ - Εισαγωγή

Σε μια ΜΔΕ υπάρχουν περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές: $x, y, \dots$

Επίσης, υπάρχει και μια εξαρτημένη μεταβλητή που είναι μια άγνωστη συνάρτηση αυτών: $u(x, y, \dots)$.

Συμβολισμός: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Μια ΜΔΕ είναι μια εξίσωση που συνδέει τις ανεξάρτητες μεταβλητές, την εξαρτημένη μεταβλητή u , και μερικές παραγώγους της u .

Τάξη μιας εξίσωσης λέγεται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Π.χ. η γενικότερη μορφή μιας ΜΔΕ 1ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

όπου F : δεδομένη, u : άγνωστη.

Η γενικότερη μορφή μιας ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (2)$$

Λύση μιας ΜΔΕ είναι μια συνάρτηση $u(x, y, \dots)$ που ικανοποιεί την εξίσωση (τουλάχιστον σε κάποιο χωρίο των μεταβλητών $x, y, \dots$).

Θα αναφερθούμε κυρίως σε κλασσικές λύσεις, δηλ. η συνάρτηση u θα είναι αρκούντως ομαλή ώστε όλες οι παράγωγοι που εμφανίζονται στην εξίσωση να είναι συνεχείς.

Παραδείγματα ΜΔΕ

1. Έστω $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto u(x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{μεταφορά}$$

είναι ΜΔΕ 1ης τάξης στον $\mathbb{R}^2$ σε δύο διαστάσεις.

2. Έστω $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto u(x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{κρουστικό κύμα}$$

είναι ΜΔΕ 1ης τάξης στον $\mathbb{R}^2$ σε δύο διαστάσεις.

3. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$. Η εξίσωση

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{κύμα με διασπορά}$$

είναι ΜΔΕ 3ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ σε δύο διαστάσεις.

Παραδείγματα ΜΔΕ

4. Έστω $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$. Η εξίσωση

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \text{εξ. Laplace}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $\mathbb{R}^3$ σε τρεις διαστάσεις.

5. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \mapsto u(t, x, y)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (= \Delta u), \quad \text{εξ. θερμότητας}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$ σε τρεις διαστάσεις.

6. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y, z) \mapsto u(t, x, y, z)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (= \Delta u), \quad \text{εξ. κύματος}$$

είναι ΜΔΕ 2ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ σε 4 διαστάσεις.

7. Έστω $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$. Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \text{ταλαντούμενη ράβδος}$$

είναι ΜΔΕ 4ης τάξης στον $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ σε δύο διαστάσεις.

Γραμμικότητα

Λέμε ότι τα παραδείγματα 1, 4, 5, 6, 7 είναι **γραμμικά**, ενώ τα 2, 3 είναι **μη γραμμικά**.

Έστω ότι η ΜΔΕ γράφεται στη μορφή $Lu = 0$, όπου L είναι ένας **τελεστής**.

(**Τελεστής**: Αν u συνάρτηση, τότε Lu είναι μια νέα συνάρτηση.)

Π.χ. για την (1): $L\cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y}$.

$$\therefore Lu = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Αν ισχύουν οι ιδιότητες:

$$L(u + v) = L(u) + L(v), \quad L(cu) = cL(u),$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις u, v και οποιαδήποτε σταθερά c , λέμε ότι ο τελεστής L είναι **γραμμικός**.

Γραμμικές εξισώσεις

Αν ο L είναι γραμμικός τελεστής,

- τότε η εξίσωση $Lu = 0$ λέγεται **ομογενής γραμμική** εξίσωση,
- και η εξίσωση $Lu = g$, με $g \neq 0$ γνωστή συνάρτηση, λέγεται **μη ομογενής** γραμμική εξίσωση.

Άσκηση:

Ελέγξτε ότι οι εξισώσεις στα παραδείγματα 1, 4, 5, 6, 7 είναι γραμμικές, ενώ στα 2, 3 είναι μη γραμμικές.

Ιδιότητες γραμμικών εξισώσεων

- ❶ Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ λύσεις της $Lu = 0$, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, \quad c_i \text{ σταθερές}$$

θα είναι λύση. (Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας.)

- ❷ Αν u είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $Lu = 0$ και w είναι μια λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $Lw = g$, τότε η $u + w$ είναι λύση της μη ομογενούς, δηλ.

$$L(u + w) = g.$$

Παραδείγματα επίλυσης (απλών) ΜΔΕ

- ❶ Θεωρήστε την $u_{xx} = 0$. Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς x έχουμε:

$$u_x(x, y) = f(y) \quad \text{όπου } f \text{ αυθαίρετη συνάρτηση.}$$

$$\int \frac{dx}{\Rightarrow} u(x, y) = f(y)x + g(y).$$

(Παρατηρήστε ότι υπάρχουν δύο αυθαίρετες συναρτήσεις στη λύση.)

- ❷ Θεωρήστε την $u_{xy} = 0$. Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x (θεωρώντας το y σταθερό):

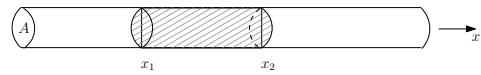
$$u_y(x, y) = f(y) \quad \text{όπου } f \text{ αυθαίρετη συνάρτηση.}$$

$$\int \frac{dy}{\Rightarrow} u(x, y) = F(y) + G(x), \quad \text{όπου } F' = f.$$

(Παρατηρήστε ότι και πάλι υπάρχουν αυθαίρετες συναρτήσεις στη λύση.)

Παράδειγμα: Παραγωγή της εξίσωσης μεταφοράς

Θεωρήστε ρευστό που ρέει με σταθερή ταχύτητα c σε λεπτό ευθ. σωλήνα σταθερής διατομής εμβαδού A . Το ρευστό περιέχει ένα ρυπαντή με συγκέντρωση $u(x, t)$ στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t .



Υποθέτουμε ότι $\nexists$ «πηγές» στο σωλήνα και απώλειες μέσω των τοιχωμάτων.

Μάζα (ποσότητα) ρυπαντή στο μέρος του σωλήνα μεταξύ των x_1 και x_2 κατά τη χρονική στιγμή t :

$$M = M(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx. \quad (3)$$

Ροή ρυπαντή στο διάστημα $[x_1, x_2]$ κατά τη χρονική στιγμή t :

Q = (ρυθμός με τον οποίο ο ρυπαντής εισέρχεται στο χωρίο στη θέση $x = x_1$)
– (ρυθμός με τον οποίο ο ρυπαντής εξέρχεται από το χωρίο στη θέση $x = x_2$).

Στην απλούστερη περίπτωση ο ρυθμός κατά τη χρονική στιγμή t στη θέση x είναι ίσος με $c u(x, t)$.

$$\therefore Q = c u(x_1, t) - c u(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} c u_x(x, t) dx. \quad (4)$$

Διατήρηση μάζας: Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο $[x_1, x_2] =$ ροή στο $[x_1, x_2]$.

$$\begin{aligned} & \xRightarrow{(3),(4)} \frac{dM}{dt} = Q \\ & \xRightarrow{\text{Καν. Leibniz}} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} c u_x(x, t) dx \\ & \xRightarrow{} \int_{x_1}^{x_2} (u_t(x, t) + c u_x(x, t)) dx = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ισότητα (5) ισχύει **για κάθε** διάστημα (x_1, x_2) του σωλήνα και ότι η u είναι C^1 , τότε

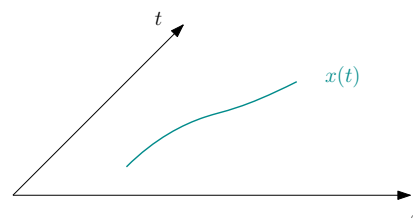
$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς: $u_t + c u_x = 0$.

(*) Έστω $f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\int_I f(x) dx = 0$ **για κάθε** διάστημα I του $\mathbb{R}$. Τότε $f(x) \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.

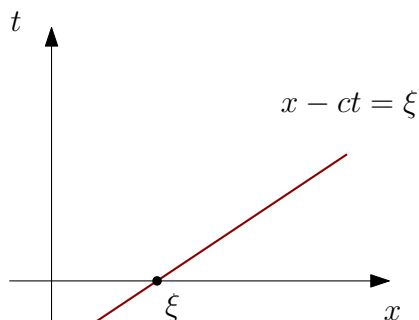
Η εξίσωση μεταφοράς $u_t + c u_x = 0$ (*)

Θεωρούμε καμπύλη $\gamma : x(t)$ στο επίπεδο (x, t) . Έστω $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto u(x, t)$.



Παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης γ : $\frac{d}{dt} u(x, t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t$.

Αρα μπορούμε να θεωρήσουμε την $u_t + c u_x$ ως τον ρυθμό μεταβολής της $u(x, t)$ κατά μήκος της καμπύλης που ικανοποιεί: $\frac{dx}{dt} = c \Leftrightarrow x - ct = \xi$ (σταθ.).



Αρα η (*) είναι ισοδύναμη με:

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ κατά μήκος των καμπυλών } x - ct = \text{σταθ.}$$

Καθώς το ξ λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές οι καμπύλες αυτές (ευθείες) που είναι παράλληλες μεταξύ τους καλύπτουν όλο το (x, t) επίπεδο. Λέγονται **χαρακτηριστικές**.

Άρα η $u(x, t)$ εξαρτάται μόνο από το $x - ct \Rightarrow$

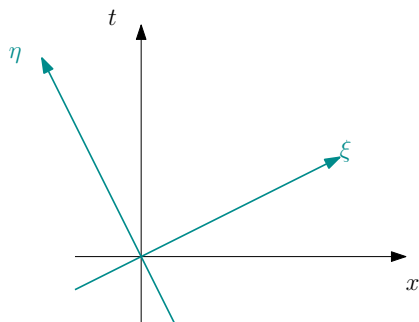
$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (6)$$

όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Άσκηση:

Επαληθεύστε ότι η (6) είναι λύση της εξίσωσης μεταφοράς.

β' τρόπος: Αλλαγή συντεταγμένων



Εισάγουμε νέες συντ/νες:

$$\xi = cx + t$$

$$\eta = x - ct$$

(Ουσιαστικά, πετύχαμε οι χαρακτηριστικές να έχουν εξισώσεις της μορφής $\eta = \text{σταθ.}$)

Τώρα

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = cu_\xi + u_\eta$$

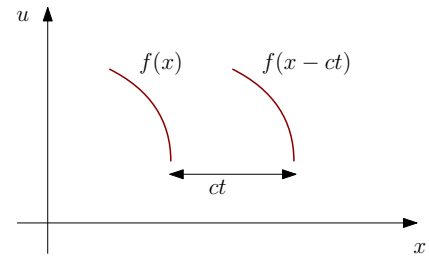
$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi - cu_\eta$$

Άρα

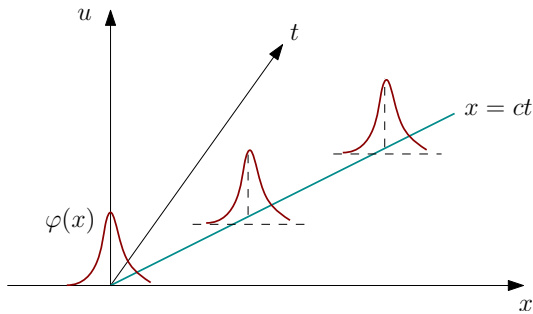
$$0 = u_t + cu_x = u_\xi - cu_\eta + c(cu_\xi + u_\eta) = (1 + c^2)u_\xi \\ \Rightarrow u_\xi = 0 \Rightarrow u = f(\eta) \Rightarrow u = f(x - ct).$$

Ιδιότητες της λύσης

Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x - ct)$ είναι ένα **οδεύον κύμα** (travelling wave). (Για $c > 0$ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα c .)



Το προφίλ του κύματος σε κάθε χρονική στιγμή δεν μεταβάλλεται και παραμένει ένα αναγνωρίσιμο χαρακτηριστικό του καθώς ταξιδεύει κατά μήκος του x .



Έστω τώρα ότι δίνεται και μια **αρχική συνθήκη**

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ξεκινάμε από το αρχικό προφίλ $u(x, 0) = \varphi(x)$ σε χρόνο $t = 0$ και σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή το προφίλ της λύσης είναι μια μεταφορά του αρχικού κατά ct στη θετική διεύθυνση του x .

Η εξίσωση $u_t + c(x, t) u_x = 0$

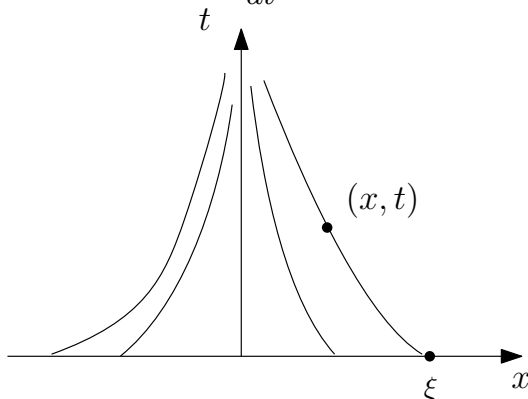
Προσοχή: c δεν είναι σταθερά.

Και πάλι η ποσότητα $u_t + c(x, t) u_x$ είναι η παράγωγος κατά μήκος της καμπύλης γ που ορίζεται από την $\frac{dx}{dt} = c(x, t)$.

Άρα εδώ οι χαρακτηριστικές δίνονται από την: $\frac{dx}{dt} = c(x, t)$.

Παράδειγμα:
$$\begin{cases} u_t - xt u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{αρχ. συνθ.} \end{cases}$$

Χαρακτηριστικές: $\frac{dx}{dt} = -xt \Rightarrow \dots \Rightarrow x e^{t^2/2} = \xi$ (σταθ.).



Η εξίσωση μας λέει ότι η u είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές, άρα $u(x, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi) = u_0(x e^{t^2/2})$.

Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Γενικά, οι ΜΔΕ έχουν πολλές λύσεις. Για να επιλέξουμε κάποια από αυτές θα πρέπει επιπλέον να καθορίσουμε βοηθητικές συνθήκες. Αυτές προέρχονται συνήθως από τη φυσική του προβλήματος και είναι δύο ειδών:

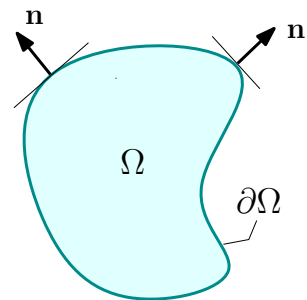
α) αρχικές συνθήκες, και β) συνοριακές συνθήκες.

Μια αρχική συνθήκη προσδιορίζει την κατάσταση του συστήματος που περιγράφει η ΜΔΕ σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 .

Π.χ. για την εξίσωση της θερμότητας $u_t - \Delta u = 0$, η αρχική συνθήκη είναι της μορφής

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \text{όπου } \varphi \text{ είναι δοσμένη συνάρτηση του } \mathbf{x} = (x, y, z).$$

Σε κάθε φυσικό πρόβλημα μια ΜΔΕ αναφέρεται σε ένα χωρίο Ω . Θα συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορο του Ω . Τα τρία σημαντικότερα είδη συνοριακών συνθηκών είναι τα εξής:



- Συνθήκες Dirichlet: $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Δηλ. καθορίζονται οι τιμές της u πάνω στο σύνορο του Ω .

- Συνθήκες Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Δηλ. καθορίζονται οι τιμές της κατά κατεύθυνσης παραγώγου της u στην κατεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$ σε κάθε σημείο του συνόρου του Ω .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} \right).$$

- Συνθήκες Robin ή μεικτές: $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) + a(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq t_0$.

Συνθήκες στο άπειρο

Σε περίπτωση που το χωρίο Ω δεν είναι φραγμένο, η Φυσική μας παρέχει συνθήκες στο άπειρο που μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκες.

Π.χ., στη σκέδαση ακουστικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων συχνά μελετάμε ηχητικά ή ηλεκτρομαγνητικά κύματα που εκπέμπονται «προς τα έξω». Η κατάλληλη συνθήκη στο άπειρο είναι η «συνθήκη εξερχόμενης ακτινοβολίας του Sommerfeld»

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0,$$

όπου $r = |\mathbf{x}|$.

Καλώς τεθειμένα προβλήματα (well-posed problems)

Καλώς τεθειμένα λέγονται προβλήματα που συνίστανται από μια ΜΔΕ που ισχύει σε ένα χωρίο, καθώς και από αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες (ή και άλλες βοηθητικές συνθήκες) και έχουν τις εξής ιδιότητες:

- ❶ **Υπαρξη λύσης:** Υπάρχει τουλάχιστον μια λύση που ικανοποιεί την εξίσωση και τις βοηθητικές συνθήκες.
- ❷ **Μοναδικότητα λύσης:** Υπάρχει το πολύ μία λύση του προβλήματος.
- ❸ **Ευστάθεια:** Η μοναδική λύση εξαρτάται «συνεχώς» από τα δεδομένα του προβλήματος υπό την έννοια ότι «μικρή» μεταβολή των δεδομένων επιφέρει «μικρή» μεταβολή στη λύση.

ΜΔΕ 2ης τάξης – Ταξινόμηση

Θεωρούμε τη γενική μορφή γραμμικής ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο ανεξ. μεταβλητές, έστω x, y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = f, \quad (7)$$

όπου a_{ij} , a_i και f είναι συναρτήσεις των (x, y) .

Παίρνουμε αρχικά την περίπτωση όπου a_{ij} και a_i είναι **πραγματικές σταθερές**.

Υπενθύμιση: Η καμπύλη $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ του xy -επιπέδου είναι:

- **έλλειψη** αν: $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$
- **υπερβολή** αν: $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$
- **παραβολή** αν: $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

Ορισμός

Η εξίσωση (7) λέγεται

- **ελλειπτική** αν: $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$
- **υπερβολική** αν: $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$
- **παραβολική** αν: $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

Στην περίπτωση που οι συντελεστές a_{11} , a_{12} , a_{22} είναι συναρτήσεις των (x, y) η εξίσωση (7) θα είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική στο σημείο (x, y) αν, αντίστοιχα, ικανοποιούνται οι αντίστοιχες σχέσεις του ορισμού.

Παραδείγματα

- Εξίσωση Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0 \quad \therefore \text{Ελλειπτική.}$$

- Εξίσωση του κύματος: $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot (-1) = 1 > 0 \quad \therefore \text{Υπερβολική.}$$

- Εξίσωση της θερμότητας: $u_t - u_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot 0 = 0 \quad \therefore \text{Παραβολική.}$$

- Εξίσωση Tricomi: $u_{yy} - yu_{xx} = 0$.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - (-y) \cdot 1 = y.$$

Άρα: Ελλειπτική αν $y < 0$, Υπερβολική αν $y > 0$, και Παραβολική αν $y = 0$.

Άσκηση:

Βρείτε τον τύπο των εξισώσεων: (α) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$
(β) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$.

Πρότυπες εξισώσεις

- Εξίσωση του κύματος: $u_{tt} - \Delta u = 0$.

$\mathbb{R}$	(1-χωρική διάσταση):	$u_{tt} - u_{xx} = 0$
$\mathbb{R}^3$	(3-χωρικές διαστάσεις):	$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$

- Εξίσωση της θερμότητας: $u_t - \Delta u = 0$.

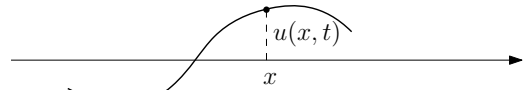
$\mathbb{R}$	(1-χωρική διάσταση):	$u_t - u_{xx} = 0$
$\mathbb{R}^3$	(3-χωρικές διαστάσεις):	$u_t - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$

- Εξίσωση Laplace: $\Delta u = 0$.

$\mathbb{R}^2$:	$u_{xx} + u_{yy} = 0$
$\mathbb{R}^3$:	$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

Η εξίσωση του κύματος ως μοντέλο μιας παλλόμενης χορδής*

Θεωρούμε μια χορδή η οποία βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας κατά μήκος του x -άξονα. Η χορδή τίθεται σε κίνηση (π.χ. έλκοντας την) και συμβολίζουμε με $u(x, t)$ την κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στη θέση x στη χρονική στιγμή t .



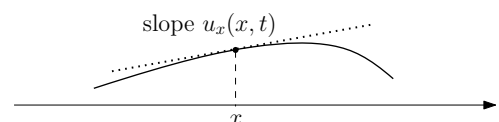
- Οι $u_t(x, t)$ και $u_{tt}(x, t)$ συμβολίζουν την κατακόρυφη ταχύτητα και επιτάχυνση, αντίστοιχα, της χορδής στη θέση x .
- Η $u_x(x, t)$ μετρά την κλίση της χορδής στη θέση x .

*R. Knobel, An Introduction to the Mathematical Theory of Waves, AMS, 2000.

Υποθέσεις

- 1 Η χορδή έχει σταθερή πυκνότητα ρ (μάζα/μοναδιαίο μήκος).
- 2 Επίπεδη ταλάντωση: Η ταλάντωση λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο.
- 3 Θεωρούμε ότι η χορδή έχει σταθερή τάση, δηλ. κάθε κομμάτι της χορδής έλκει τα γειτονικά του μέρη με μια δύναμη σταθερού μέτρου T . Βεβαίως, η διεύθυνση της δύναμης αυτής μεταβάλλεται και είναι εφαπτόμενη της χορδής σε κάθε σημείο της.

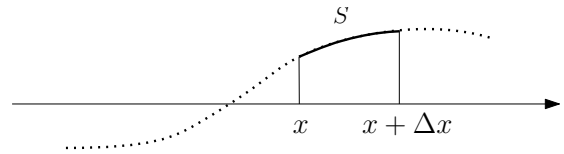
- 4 Μικρές ταλαντώσεις: Καθώς η χορδή ταλαντούται η κλίση $u_x(x, t)$ σε κάθε σημείο της χορδής είναι μικρή.



- 5 Απουσία εξωτερικών δυνάμεων: Θεωρούμε ότι μόνον η τάση επιδρά στην ταλάντωση της χορδής. Βαρύτητα, τριβές ή άλλες εξωτερικές δυνάμεις αγνοούνται.

Παραγωγή της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος

S : το μέρος της χορδής που βρίσκεται μεταξύ των σημείων x και $x + \Delta x$, όπου $\Delta x > 0$ είναι μικρό.



Θεωρούμε το μικρό αυτό μέρος της χορδής ως ένα σώμα που κινείται μόνο ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$(\text{Μάζα του } S) \times (\text{επιτάχυνση του } S) = \text{Ολική δύναμη που επιδρά στο } S, \quad (8)$$

όπου επιτάχυνση και δύναμη έχουν διεύθυνση κάθετη στον x -άξονα.

$$\text{Μάζα του } S = (\text{πυκνότητα}) \times (\text{μήκος του } S) = \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (u_x(s, t))^2} ds$$

$$\text{Όμως } |u_x| \text{ μικρό} \Rightarrow (u_x)^2 \ll 1 \quad \therefore \sqrt{1 + (u_x)^2} \approx 1.$$

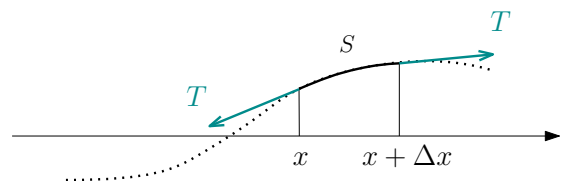
Άρα

$$\text{Μάζα του } S \approx \rho \int_x^{x+\Delta x} 1 ds = \rho \Delta x. \quad (9)$$

Επιλέγουμε το αριστερό άκρο x του S για να περιγράψουμε τη θέση του S . Τότε

$$\text{Επιτάχυνση του } S = u_{tt}(x, t). \quad (10)$$

Τώρα, η ολική τάση είναι το αποτέλεσμα της τάσης που ασκείται στα άκρα του S από τα μέρη της χορδής που βρίσκονται αριστερά και δεξιά του S :

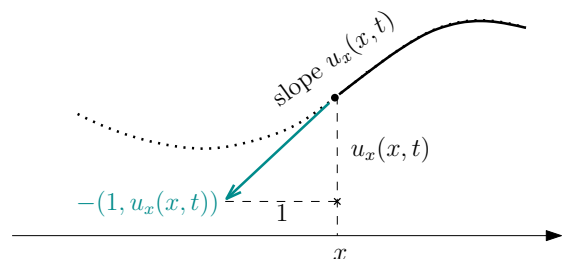


Θεωρούμε το διάνυσμα $-(1, u_x(x, t))$. Αυτό εφάπτεται στη χορδή στη θέση x και έχει φορά προς τα αριστερά.

Άρα το διάνυσμα

$$-\frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}$$

είναι ένα διάνυσμα μέτρου 1 που εφάπτεται στη χορδή στη θέση x και έχει φορά προς τα αριστερά.



∴ το διάνυσμα

$$-T \frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}$$

εκφράζει την τάση που ασκείται στο αριστερό άκρο του S με φορά προς τα αριστερά.

Η κατακόρυφη συνιστώσα αυτής της δύναμης είναι:

$$-T \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}.$$

Και πάλι από την υπόθεση των «μικρών ταλαντώσεων» έχουμε ότι $\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} \approx 1$, οπότε

$$\text{Η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης στο αριστερό άκρο του } S \approx -T u_x(x, t).$$

Εντελώς ανάλογα

$$\text{Η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης στο δεξί άκρο του } S \approx T u_x(x + \Delta x, t).$$

$$\text{Ολική δύναμη στο } S = T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t). \quad (11)$$

Τελικά, από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα (8), και τις (9) – (11), έχουμε

$$\begin{aligned} \rho(\Delta x) u_{tt}(x, t) &= T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t) \\ \Rightarrow u_{tt}(x, t) &= \frac{T}{\rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \\ \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{\Rightarrow} u_{tt}(x, t) &= \underbrace{\frac{T}{\rho}}_{=c^2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \\ \Rightarrow u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \end{aligned}$$

όπου $c = \sqrt{T/\rho}$.

Κυματική εξίσωση σ' ολόκληρη την ευθεία

Θεωρούμε την

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Η (12) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

Οι τελεστές $\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x}$ μας θυμίζουν κατά κατεύθυνση παράγωγο. Επομένως, ορίζουμε χαρακτηριστικές συντεταγμένες:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Επομένως, ορίζουμε

$$\xi(x, t) = x - ct, \quad \eta(x, t) = x + ct, \quad u(x, t) = U(\xi(x, t), \eta(x, t)).$$

Κανόνας της αλυσίδας:

$$\begin{aligned} u_t &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -c U_\xi + c U_\eta, \\ u_{tt} &= \left(-c U_{\xi\xi} + c U_{\xi\eta} \right) (-c) + \left(-c U_{\eta\xi} + c U_{\eta\eta} \right) c \\ &= c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta\eta}, \\ u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta, \\ u_{xx} &= (U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}) + (U_{\eta\xi} + U_{\eta\eta}) = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Άρα με αυτή την αλλαγή μεταβλητών αν $c \neq 0$ η (12) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (13)$$

Η λύση της (13) είναι: $U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$. **(ΑΣΚΗΣΗ)**

Άρα, γυρνώντας στις αρχικές μεταβλητές έχουμε ότι:

Η γενική λύση της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ είναι

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (14)$$

όπου F, G είναι αυθαίρετες (δύο φορές παραγωγίσιμες) συναρτήσεις.

Δηλ. η λύση της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$,

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

είναι το άθροισμα δύο οδευόντων κυμάτων, ενός που κινείται προς τα δεξιά και ενός που κινείται προς τα αριστερά, με σταθερή ταχύτητα c .

Παράδειγμα: Όλες οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$:

$$u(x, t) = e^{x-ct}$$

$$u(x, t) = \sin(x - ct)$$

$$u(x, t) = (x - ct)^2 + e^{(x+ct)^2}$$

Άσκηση:

Κάντε απ' ευθείας αντικατάσταση για να ελέγξετε ότι η συνάρτηση $u(x, t) = \cos(t) \sin(x)$ είναι μια λύση της $u_{tt} = u_{xx}$. Σύμφωνα με τη γενική μορφή (14) των λύσεων της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είμαστε σε θέση να γράψουμε την $u(x, t)$ ως $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Ποια είναι τα οδεύοντα κύματα που κινούνται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά στην περίπτωση αυτή;

Πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) για την κυματική εξίσωση στην ευθεία

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$\text{Αρχικές συνθήκες (Α.Σ.):} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Είδαμε πριν ότι η γενική λύση της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ είναι:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Για να ικανοποιούνται οι Α.Σ. στο $t = 0$ θα πρέπει:

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= \varphi(x) \quad (*) \Rightarrow & F'(x) + G'(x) &= \varphi'(x), \\ \text{και} & & -c F'(x) + c G'(x) &= \psi(x). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad F'(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi'(x) - \frac{1}{c} \psi(x) \right) \quad \& \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi'(x) + \frac{1}{c} \psi(x) \right)$$

Μετά, ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 έως s :

$$F(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\omega) d\omega + A,$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\omega) d\omega + B.$$

Λόγω της (*) έχουμε ότι $A + B = 0$. Άρα:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(\omega) d\omega + \frac{1}{2}\varphi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Λύση d' Alembert (~ 1750)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\omega) d\omega.$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

Η λύση είναι:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos \omega d\omega = \frac{1}{2c} (\sin(x + ct) - \sin(x - ct)) \\ &\stackrel{\dagger}{=} \frac{1}{c} \sin \frac{(x + ct) - (x - ct)}{2} \cos \frac{(x + ct) + (x - ct)}{2} \\ &= \frac{1}{c} \sin(ct) \cos x. \end{aligned}$$

Άσκηση:

Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση που βρήκαμε είναι λύση του ΠΑΤ, δηλ., ότι ικανοποιεί την εξίσωση και τις Α.Σ.

[†] $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2 - 2|x|, & |x| \leq 1, \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases},$$

Η λύση είναι:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) \right).$$

